Fizika I

(PE BSc szak számára)

„A sakktábla a világ; a bábuk az Univerzum jelenségei, a játék-szabályokat természeti törvényeknek nevezzük.
Az ellenfél rejtve van előlünk.
Tudjuk azonban, hogy játéka mindig korrekt és türelmes, és saját kárunkon azt is megtanultuk, hogy sohasem követ el hibát és nem bocsátja meg a tudatlanságot."

Thomas Huxley

A FIZIKA TÁRGYA, FELADATA, MÓDSZEREI

Tárgya

Neve az ógörög physis (φνσιζ) – azaz természet szóból ered, ez is utal rá, hogy mivel foglalkozik. Tárgya a természet jelenségeinek vizsgálata, törvényeinek felderítése (kivéve a természeti jelenségek néhány szűkebb csoportját, melyeket történeti okokból máshová sorolunk, pl. kémia, biológia, stb.)
A körülöttünk levő világ tanulmányozása során felmerülnek a következő kérdések: Honnan erednek a természeti törvények? Szükségszerű-e a létük? „Vakszerencse-e, hogy a tudomány eszközeivel sikerül megmagyaráznunk a világot, vagy törvényszerű, hogy a kozmosz rendjéből kiemelkedő biológiai szervezetek megismerő képességei feltárják e rendet?" (*Paul Davies*) Ezek a kérdések átvezetnek a meta**fizikába**, (filozófia).

Feladata

természettudomány: a természet törvényeinek megismerése
alkalmazott tudomány: a természet törvényeinek felhasználása

A fizika felosztása

régen: milyen érzékszerv játszik szerepet a tanulmányozásában (fénytan, hangtan stb.)
ma: összefüggő nagyobb törvényrendszerek szerint
- mechanika
- termodinamika

- elektrodinamika
- kvantummechanika
- magfizika
- elemi részek fizikája
- relativitáselmélet
- stb.

Módszerei

Itt tkp. a tudományos módszert próbáljuk röviden leírni. Ez nem csak a fizikában használatos, de talán itt jelenik meg a legtisztábban.

Megfigyelés, **kísérlet**: empirikus (tapasztalati) összefüggés felállítása.

Ennek része a **mérés**: kvantitatív (mennyiségi) összefüggés megállapítása (itt fontos a matematika szerepe). Ez inkább a kísérleti fizika tárgya.

Általános törvény keresése, melynek speciális esetei az empirikus törvények. Ez inkább az elméleti fizika tárgya.

Hipotézis (sejtés, ideiglenes elmélet) felállítása, majd a belőle eredő (matematikai, logikai úton) következmények, tapasztalati (kísérleti) ellenőrzése. Egy elmélet vagy hipotézis fontos feladata az **előrejelzés**. Ha ez helyesnek bizonyul, az a hipotézis elméletté válását elősegíti, az elméletet pedig biztosabbá teszi.

Példák:	- Neptunusz, Plútó felfedezése	-	a Newton-f. gravitációs törvény alapján
	- elektromágneses hullámok	-	a Maxwell elmélet (elektrodinamika) alapján
	- pozitron	-	Dirac relativisztikus kvantummechanikája
	- kvark	-	Gell-Mann hipotézise alapján
	stb.		

A megismerés, törvényalkotás két logikai útja:

- **indukció** (az egyediből az általánosra következtetés) a kísérleti fizikára jellemző, míg a
- **dedukció** (az általánosból az egyedire) az elméleti fizikára (matematika szerepe).

Az elméletek és hipotézisek gyakran ún. **modellek**ben öltenek testet. Ezeket egy-egy jelenségkörre vonatkozó, véges pontossággal igazolt törvényeknek tekintjük.

A fizikai törvényeket matematikai egyenletek formájában fogalmazzuk meg. A fizikai törvényekben (egyenletekben) szereplő betűk, **fizikai mennyiségeket** jelentenek.

A fizika tárgyköre nagy vonalakban

Mondhatjuk, hogy szinte mindent magában foglal a környező világból, a legkisebbtől - **fundamentális részecskék** - a legnagyobbig - **világegyetem** -, és az ősrobbanástól (idő kezdete) a „világ végéig”. Tehát térben és időben a végleteket, és a köztük levő tartományt ragadja meg.

A részecskefizika **standard elmélete v. standard modellje** a fizika mai állása szerint **négy alapvető kölcsönhatás**i formát ismer, melyeket **mértékbozon**oknak nevezett részecskék közvetítenek. A standard modellben a **fundamentális részecskék** két családját, **lepton**oknak és **kvark**oknak hívjuk. Ezek, és ezek kölcsönhatásai építik fel az általunk ismert világot.

A fundamentális részecskék és a négy alapvető kölcsönhatás, jelenlegi (2011) tudásunk szerint:

Leptonok	Kvarkok		Mértékbozonok	Kölcsönhatás
spin: 1/2	spin: 1/2		spin: 1	
elektron e -1 0,511	u-kvark u +2/3 5,6		foton γ 0 0	elektro- mágneses
elektron-neutrínó ν_e 0 ?	d-kvark d -1/3 9,9		W-bozon $W_\pm$ ± 1 $85\cdot 10^3$	gyenge
müon μ^- -1 105,8	c-kvark c +2/3 1350		Z_0-bozon W_0 0 $95\cdot 10^3$	
müon-neutrínó ν_μ 0 ?	s-kvark s -1/3 199		gluon g 0 0	erős
tauon τ^- -1 1860	t-kvark t +2/3 $2\cdot 10^5$		spin: 2	
tauon-neutrínó ν_τ 0 ?	b-kvark b -1/3 5000		graviton G 0 0	gravitációs

részecske neve jele töltése tömege MeV-ban

A MeV = 10^6 eV (megaelektronvolt = 10^6 elektronvolt). Az elektronvolt az az energia, amelyet egy elektron vesz fel, ha 1 V potenciálkülönbségen halad át. A tömeg-energia ekvivalencia (egyenlőség) alapján ($E = mc^2$), ez a tömeg mértékegysége is lehet.

- **TOE ? (Theory of Everything)**
  - **GUT ? (Great Unification Theory)**
    - **elektro-gyenge**
      - **elektromágneses**
      - **gyenge**
    - **erős**
  - **gravitációs**

Bizonyos körülmények között (nagyon magas hőmérséklet és anyagsűrűség) az elektromágneses és a gyenge kölcsönhatás egybeolvad. Ezt már részecskegyorsítókban kísérletileg sikerült kimutatni. További hőmérséklet- és sűrűségnövekedés esetén feltételezhető, hogy a többi kölcsönhatás is „összeolvad”. A GUT-ra van meggyőző elméleti levezetés, de a gravitáció egyesítése a másik 3 kölcsönhatással egyelőre nem megoldott.
Több elméleti modell van, amelyek megkísérlik megoldani a problémát. A részecskefizikában a „szuperszimmetrikus” vagy „árnyék-részecskék” családja választ adhat több kérdésre. Ennek kísérleti megerősítésére/cáfolatára a nagy részecskegyorsítókban már folynak a kísérletek.
A húrelmélet (v. szuperhúrelmélet) szintén elméleti megoldásokat kínál, itt már a gravitációt is beillesztik az egységes leírásba. Ennek kísérleti tesztelésére egyelőre nem látszik megvalósítható módszer.
A kozmológia standard modellje a „**Big Bang**” vagy ősrobbanás, ami szerint világunk 13,7 milliárd éve egy kezdeti nagyon sűrű és forró állapotból kiindulva formálódott és azóta tágul.
Ezekről az elméletekről az interneten, ill. a népszerűsítő irodalomban lehet olvasni bővebben.

Oktatástechnikai megjegyzések

Ebben a segédanyagban levendula színű szövegdobozban a tanulásra, számonkérésre, utaló megjegyzések lesznek. Ezzel is segíteni szeretném a felkészülést.

A barackszínű szövegdobozban kiegészítő információk lesznek. Ezek ismerete nem szigorúan a törzsanyag része, csak a jobb jegyért kell, és azoknak ajánlott, akik MSc szinten tervezik folytatni a tanulmányaikat.

A gyakran előforduló hibákra utaló megjegyzéseket, amire figyelni kell, pirossal írom.
A szöveg mellett - részben - az előadáson használt diákat is beteszem, hogy így egységesen, egymás mellett legyen minden segédanyag.

MECHANIKA

Feladata: anyagi testek mozgására vonatkozó törvények felállítása.

Tárgyköre: anyagi pontok mozgásával kapcsolatos jelenségek.

KLASSZIKUS MECHANIKA

A klasszikus mechanika a testek mozgásával foglalkozik. Kialakulása Galilei és Newton nevéhez fűződik.

A mérés

A jelenségek térben és időben játszódnak le. Ezeket mérni kell.

Mérés: meghatározzuk, hogy hányszor van meg a mérendő mennyiségben, egy vele egynemű, önkényesen egységnek választott mennyiség.

A mérés eredménye két adat, **mértékszám** és **mértékegység**: pl. 3 m

A fizikai mennyiség egy meghatározott módon elvégzett, vagy elvileg elvégezhető mérés eredményét jelenti.

Vannak ún. **alapmennyiségek**, melyeket mérési eljárással definiálunk (pl. út, s), és **leszármaztatott mennyiségek**, melyeket alapmennyiségekre vezetünk vissza (pl. sebesség: $v = \Delta s/\Delta t$).

A mechanikában 3 alapmennyiség van: a **hosszúság**, az **idő** és a **tömeg.**

A testek mozgása **térben** és **időben** történik. A tér és idő alapmennyiségek, definíciójuk tehát a mérési módjuk megadásával történik. A két alapvető mennyiség a **távolság** (elmozdulás, kitérés; út) és az **idő**.

Az idő

Az idő alatt érthetünk időpontot, pillanatot (pl. t_1 vagy t_2) és időszakaszt (két időpont különbségét, azaz távolságukat az időtengelyen): $t_2 - t_1 = \Delta t$). A „Δ" mindig az adott mennyiség végső és kezdeti értékének különbségét jelöli.

(Az idő a köznyelvben még időjárást is jelenthet.)

Az idő (jele: t, T) mértékegysége a másodperc: 1 s

A másodperc definíciója régebben a Föld forgására alapult:

1 másodperc (secundum, s) = 1/86400 szoláris középnap.

Ez utóbbi a Nap két delelése között eltelt egy évre vett átlagos idő. Mivel a Föld ellipszis pályán mozog, nem egyenlő utakat tesz meg két körülfordulása alatt. Bár kicsi a különbség, ma már jól kimutatható. Ha az állócsillagokhoz viszonyítjuk, ez a probléma nem merül fel. Felmerül viszont az, hogy a Föld forgása is ingadozik, sőt – hosszú idő átlagában - kimutathatóan lassul. Ezért kellett egy pontosabb meghatározás.

1967-ben új definícióban állapodtak meg: 1 s = a ^{133}Cs atom alapállapotának két hiperfinom szintje közti átmenet során keletkező sugárzás periódusidejének 9 192 631 770-szerese.

A távolság

A távolság (jele: *l*, *s*) mértékegysége a méter: 1 m

1790-ben a Francia Akadémia az ősmétert a Föld Párizson átmenő délköre hosszának negyvenmilliomod részének választotta. Az ebből számolt értéket egy platina-irídium rúd két karcolatával jelezték. Ezt a rudat Sevresben (Párizs mellett) őrizték, és az egyes országok mértékügyi hivatalai kaptak belőle másolatot.

Mint kiderült, ez a két karcolat közti érték nem pontosan egyezik az adott délkör negyvenmilliomod részének hosszával, de a definíció a karcolatok távolsága maradt. A méréstechnika fejlődésével azonban ez a pontosság már nem felelt meg, új atomi állandóra alapozott definíció kellett.

1960-ban a métert atomi állandóra vezették vissza: a ^{86}Kr spektrumában levő narancsszínű fény vákuumbeli hullámhosszának 1 650 763,73 -szereseként definiálták.

A fizikában erős törekvés irányul arra, hogy minél kevesebb alapmennyiségből vezessük le a többit. Mivel a vákuumbeli fénysebesség egy nagyon alapvető és stabil fizikai mennyiségnek bizonyult (lásd. speciális relativitáselmélet!), célszerűnek tűnt a távolságot ennek segítségével, az idővel meghatározni. Ezt a mai definíciót (Bay Zoltán magyar fizikus ajánlására) 1983-ban fogadták el.

1983: 1 méter az a távolság, amit a fény vákuumban $3{,}33564095 \cdot 10^{-9}$ s alatt megtesz.

Skalár- és vektormennyiségek

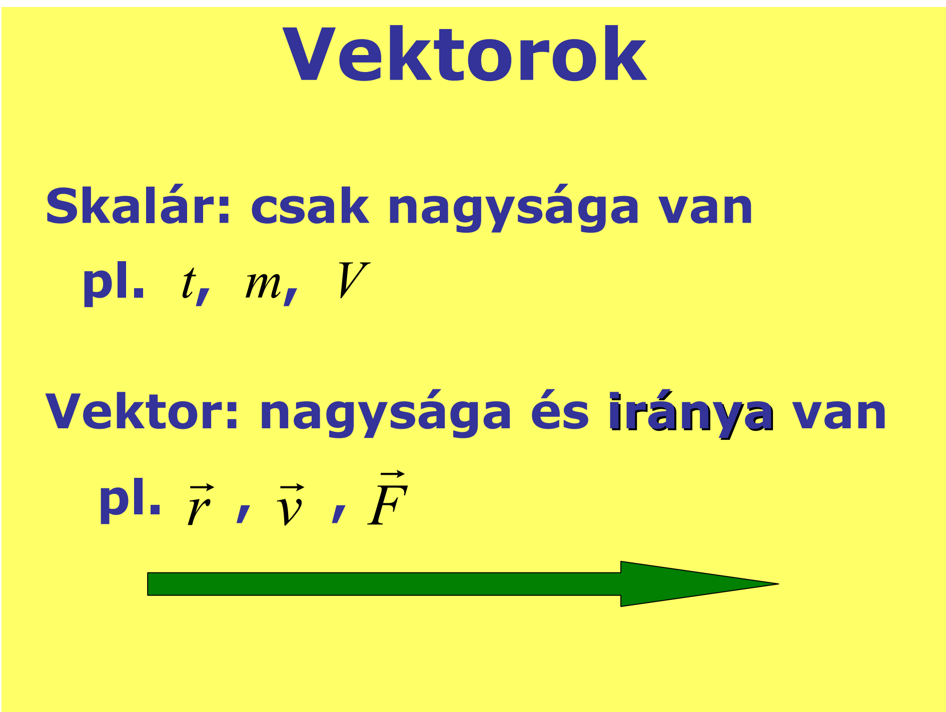
A fizikában megkülönböztetünk ún. skalár- ill. vektormennyiségeket.

Skaláris mennyiség, vagy röviden **skalár**:

Olyan fizikai mennyiségek, melyeket egy mérőszámmal és egy mértékegységgel egyértelműen jellemezni tudunk. Ilyen pl. a hosszúság, terület, térfogat, tömeg, hőmérséklet, stb. Konkrétan: pl. 3 m, 5 m^2, 8 cm^3, 4 kg, 273 K.

A jelenségek leírására célszerű bevezetni olyan mennyiségeket is, melyek a nagyságon túl, az irányra vonatkozó információt is tartalmaznak. Ezeket iránymennyiségeknek nevezzük. Ezek közé tartozik a **vektormennyiség** vagy röviden **vektor**. Ilyen pl. a helyvektor, a sebesség, a gyorsulás, az erő, stb. Konkrétan: pl. a helyvektor nagysága: 7,07 m de ez még nem adja meg az irányát. A tér 3 irányának megfelelő komponens megadása itt szükséges, azaz $x = 3$ m, $y = 4$ m, $z = 5$ m.

Geometriai értelemben a vektorok irányított szakaszok, amelyeket nyilakkal ábrázolunk.



Jelölés:

Skalár: dőlt betű, pl. s (út), t (idő), m (tömeg)

Vektor: $\vec{r}$, $\bar{r}$, $\underline{r}$, régebben gót betű, de nyomtatásban leggyakrabban vastagított betű: **r**.

Oktatási tapasztalatom szerint a vastagított betű nem volt kellően hangsúlyos ahhoz, hogy a lényeges különbséget tudatosítsa a vektor ill. skalár mennyiségek között. Ezért én most itt inkább a kényelmetlenebb, de talán a különbséget jobban tudatosító „felül nyíl” verziót ($\vec{r}$) használom.

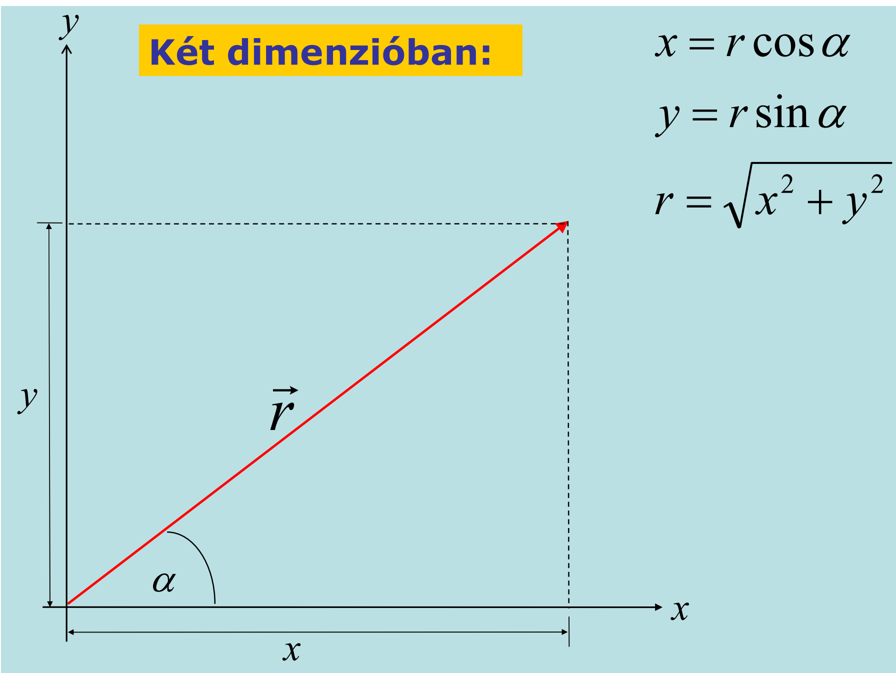
Ha csak a vektor nagyságát akarom jelölni, akkor a skalár jelét, a dőlt betűt használom, pl. r, vagy az abszolút értéket: $|\vec{r}|$.

A vektorok tulajdonságai

Itt csak a vektorok leglényegesebb tulajdonságait foglaljuk össze, a részletesebb leírást lásd. a megfelelő kézikönyvekben!

Vektor nagysága és iránya

A vektor nagyságán értjük az abszolút értékét vagy hosszát. Ez a vektor jellemzésére nem elég. Pl. ha meg akarjuk adni, hogy a szoba észak-keleti sarkához viszonyítva hol vagyunk, nem elég azt mondani, hogy 3 m-re. Ez csak egy 3 m sugarú gömbfelület pontjait adja meg. A pontos helymeghatározáshoz az irány is kell. A vektor **nagysága** csak egy skalármennyiség, tehát semmiképpen nem azonos a vektorral $(\vec{r} \neq r)$! Nézzük két dimenzióban (síkban):



A vektor tengelyekre eső vetületei a vektor komponensei. A komponensek egyértelműen meghatározzák a vektort. Síkban ez két adat: x, y, (térben 3: x, y, z). A vektort ezért írhatjuk így is: $\vec{r}(x, y)$, (térben: $\vec{r}(x, y, z)$). Vagy bevezetve az x, y, z tengelyek irányába mutató, egységnyi hosszúságú vektorokat (lásd még a vonatkoztatási rendszernél!), az ún. egységvektorokat: $\vec{r}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$.

Vektorok összeadása, kivonása

A vektorokat összeadhatjuk (kivonhatjuk) algebrai úton és grafikusan.

Algebrai út: a megfelelő komponenseket adjuk össze ill. vonjuk ki.

Pl. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ esetén, $\vec{a}(a_x, a_y) + \vec{b}(b_x, b_y) = \vec{c}(c_x, c_y)$, ahol $c_x = a_x + b_x$, $c_y = a_y + b_y$)

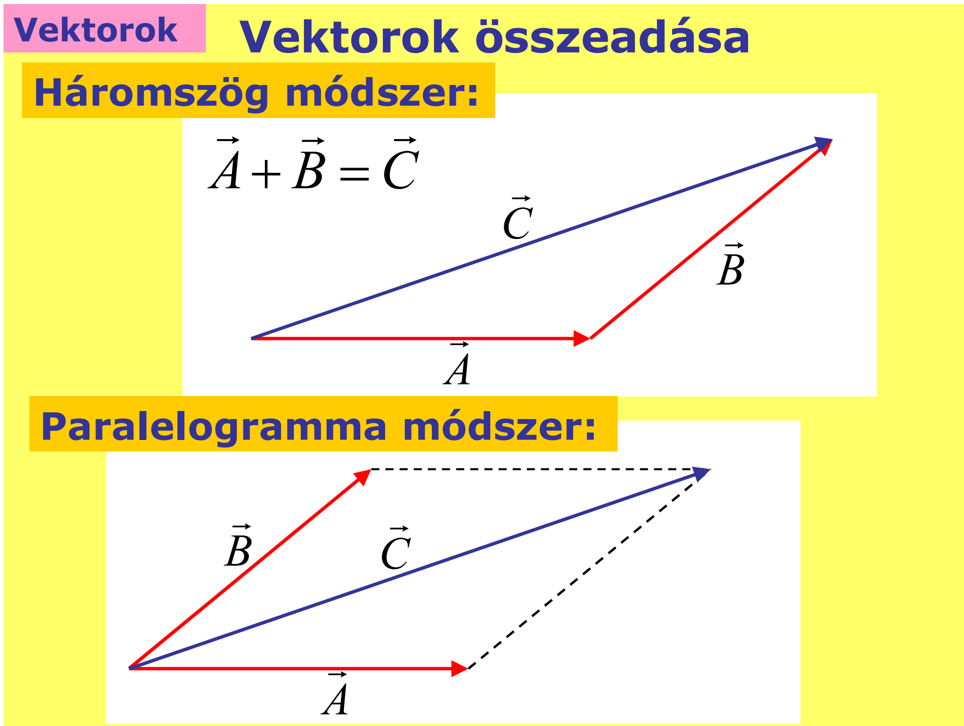
és $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$ esetén, $\vec{a}(a_x, a_y) - \vec{b}(b_x, b_y) = \vec{c}(c_x, c_y)$, ahol $c_x = a_x - b_x$, $c_y = a_y - b_y$)

3 dimenzióban természetesen a vektorok 3-3 megfelelő komponensét adjuk össze ill. vonjuk egymásból.

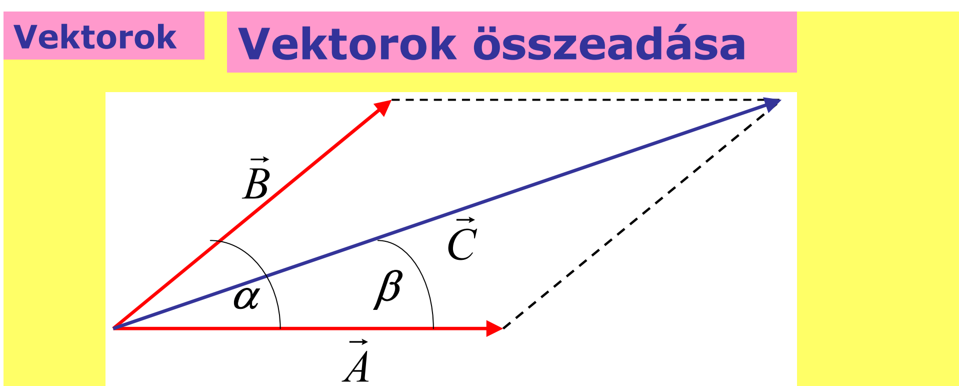
Grafikusan:

Az egyik vektor végpontjába illesztjük a másik vektort, és az első kiinduló pontjából a másik végpontjába húzunk egy vektort. Ez lesz a két vektor összegeként kapott vektor.

Vagy: a két vektort közös kiindulópontba mérjük fel, majd ebből a pontból húzunk egy vektort a két vektor által meghatározott paralelogramma átellenes csúcspontjába. Lásd ábra!



Az utóbbi esetben az eredő vektor **nagysága** és **iránya** az alábbi módon adható meg, a koszinusz-, ill. szinusztétel segítségével:

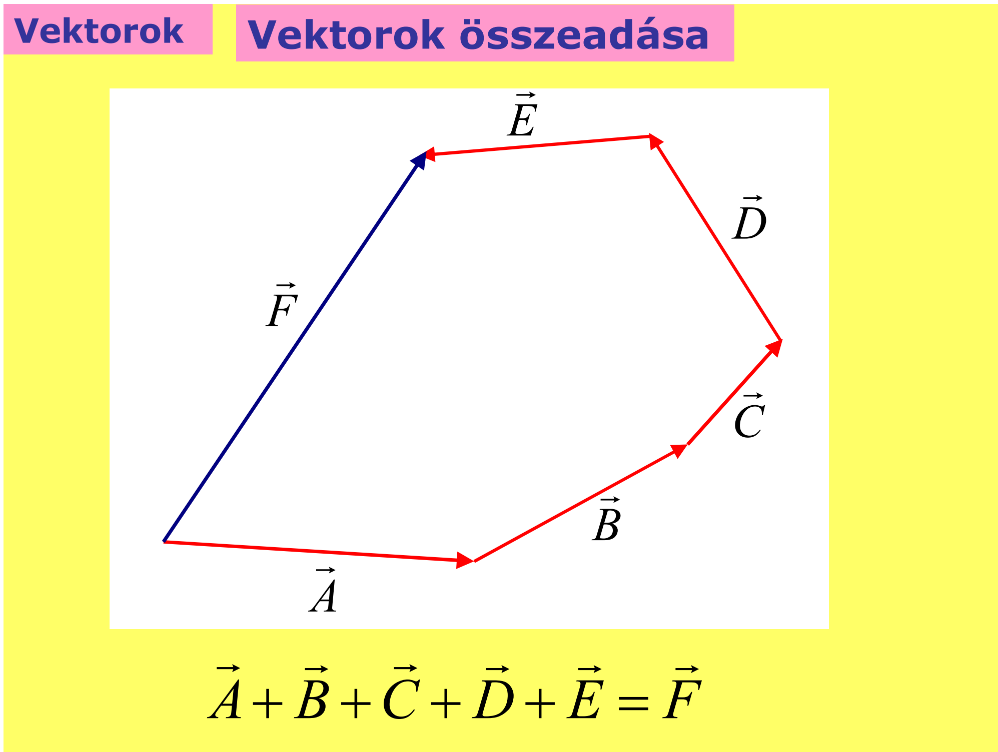


$\vec{C}$ nagysága v. abszolút értéke (C v. $|\vec{C}|$):

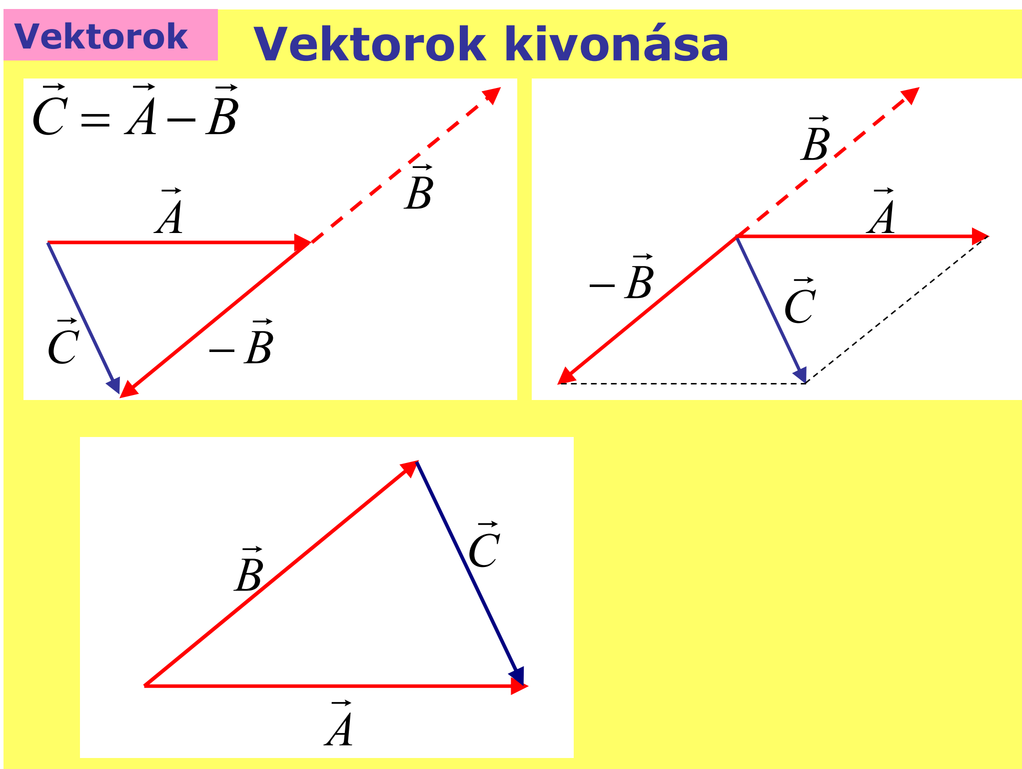
$$C=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\alpha}$$

iránya ($\vec{A}$-hoz mért szöge)**:** $\sin\beta=\frac{B}{C}\sin\alpha$

Több vektor összegét úgy állíthatjuk elő, hogy egymás után felmérjük őket az ábrának megfelelően, majd az első kezdőpontjából az utolsó végpontjába húzunk egy vektort, ez az összegvektor:



A vektorok kivonását az összeadásra vezetjük vissza. A vektorhoz annak ellentettjét, vagy -1 szeresét adjuk hozzá. Itt is alkalmazhatjuk a háromszög ill. paralelogramma módszert a fenti összeadás analógiájára, és a leggyakrabban használt (de elsőre kevésbé nyilvánvaló) 3. verziót:



Érdemes kihangsúlyozni, hogy a különbségvektor mindig a kisebbítendő (itt $\vec{A}$) felé mutat.

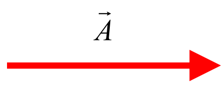
A vektorok összeadása (kivonása) felcserélhető (kommutatív): $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$

és tetszés szerint csoportosítható (asszociatív): $\left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\vec{C}=\vec{A}+\left(\vec{B}+\vec{C}\right)$

Az összeadás-kivonás láthatóan más műveleti szabályokkal történik a skalár- és a vektormennyiségek esetében. Nagy hiba összekeverni őket! Azaz nem mindegy, hogy mit írunk egy fizikai egyenletben, vektorok adódnak össze, avagy skalármennyiségek!

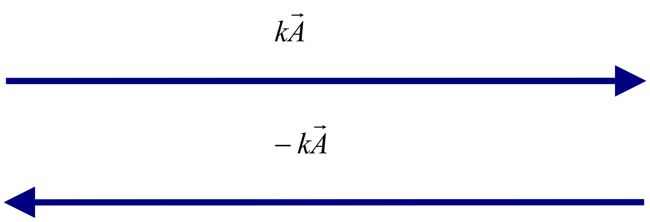
Vektorok szorzása

a) **Vektor szorzása egy skalárral.** Az $\vec{A}$ vektor *k* szorosa egy olyan vektor, aminek nagysága *kA*, iránya megegyezik $\vec{A}$ irányával, ha *k* pozitív, ellentétes vele, ha *k* negatív (itt *k* = 3):



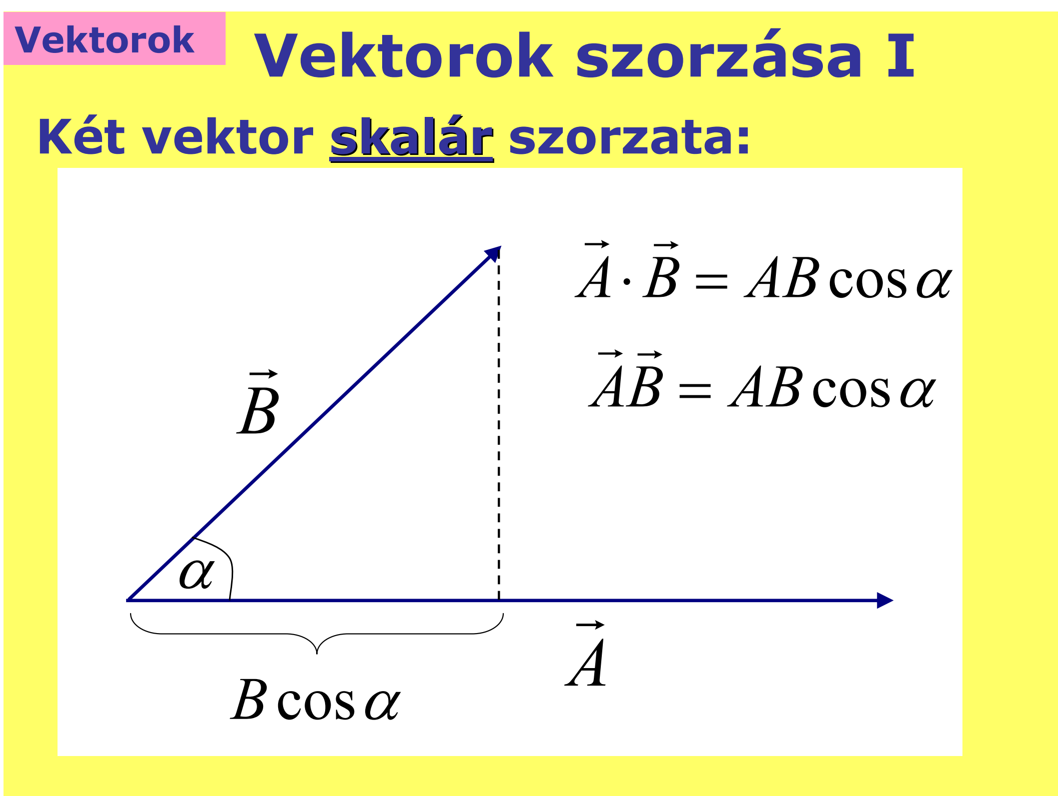
Tkp. minden egyes komponenst szorozzuk a *k* –val. Ha $\vec{A}=(A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k})$,

akkor $k\vec{A}=(kA_x\vec{i}+kA_y\vec{j}+kA_z\vec{k})$



b) **Két vektor skalár (v. skaláris) szorzata.**

Ekkor két vektort úgy szorzunk össze, hogy eredményül egy skalár mennyiséget kapunk:



A skalárszorzat felcserélhető (kommutatív): $\vec{A}\vec{B} = \vec{B}\vec{A}$

és tetszés szerint csoportosítható (asszociatív): $\left(\vec{A}\vec{B}\right)\vec{C} = \vec{A}\left(\vec{B}\vec{C}\right)$

A skalárszorzat komponensenként:

$$\vec{A}\vec{B} = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k})(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}) =$$

$$A_x\vec{i}B_x\vec{i} + A_x\vec{i}B_y\vec{j} + A_x\vec{i}B_z\vec{k} +$$
$$A_y\vec{j}B_x\vec{i} + A_y\vec{j}B_y\vec{j} + A_y\vec{j}B_z\vec{k} +$$
$$A_z\vec{k}B_x\vec{i} + A_z\vec{k}B_y\vec{j} + A_z\vec{k}B_z\vec{k}$$

Az egymásra merőleges vektorok skalárszorzata 0, (cos 90° = 0): $\vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{k} = \vec{k}\vec{i} = 0$

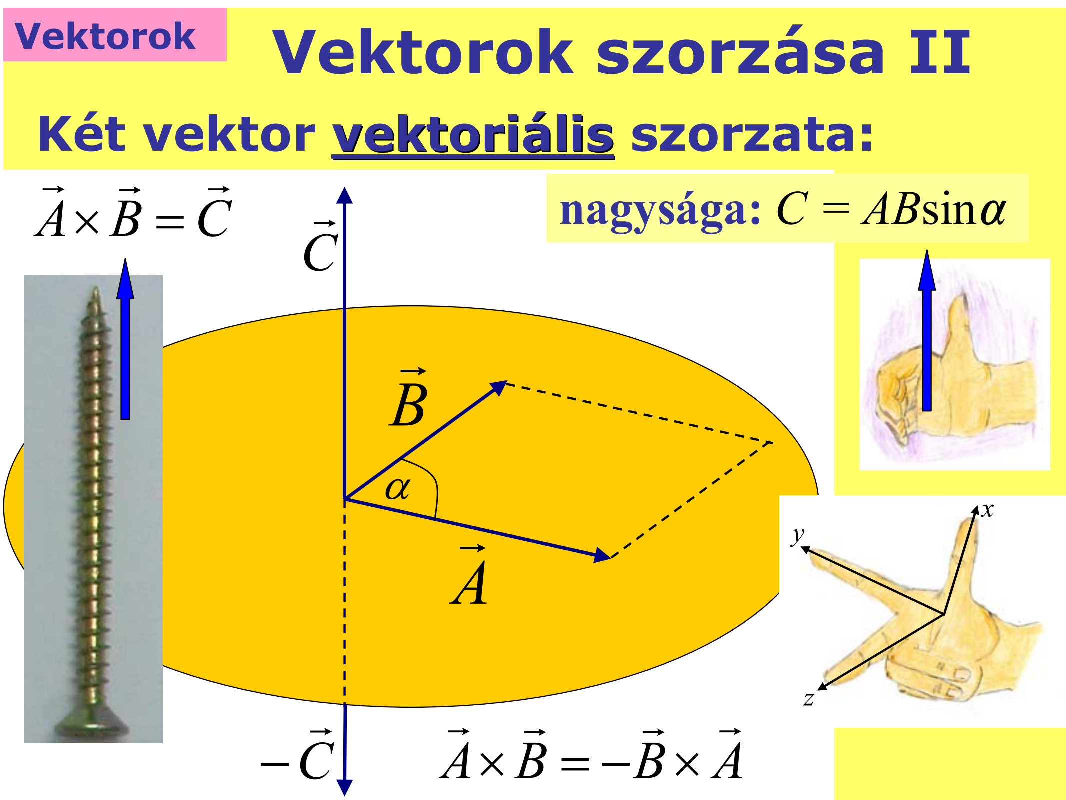
A párhuzamos egységvektorok skalárszorzata 1, (cos 0° = 1): $\vec{i}\,\vec{i} = \vec{j}\vec{j} = \vec{k}\vec{k} = 1$

Tehát ami marad: $\vec{A}\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

Két vektor skaláris szorzata nem keverendő össze egy vektor és egy skalár szorzatával!

c) **Két vektor vektor (v. vektoriális) szorzata.**

Ekkor két vektort úgy szorzunk össze, hogy eredményül egy vektor mennyiséget kapunk:



Az eredményül kapott vektornak tehát van egy **nagysága**: $AB\sin\alpha$, és egy **iránya**.

Az iránya mindig merőleges a két összeszorzandó vektor által meghatározott síkra. (Ha két vektor nem esik egy egyenesre, akkor mindig meghatároz egy síkot.) Ez még kevés az irány megadásához, mert a síkot döfheti alulról, ill. felülről. (Lásd. ábra!) Az irány kijelölése a jobbkéz-szabálynak felel meg. Azaz,

ha vektorokat a szorzat felírásának sorrendjében a kisebb szög mentén egymásba forgatom (itt $\vec{A}$ -t a $\vec{B}$ -be) akkor a forgásirányba hajlított jobb kezünk hüvelykujja mutat az eredményül kapott vektor irányába. Vagy: ebben a forgásirányban (ez amúgy a + forgásirány, az óramutató járásával ellentétes) csavarva a jobbmenetes csavart, a csavar haladási iránya egyezik a szorzatvektor irányával.
Vagy: ha a szorzat felírásának sorrendjében a jobb kezünk hüvelyk-, mutatóujját feleltetjük meg a kérdéses vektoroknak, akkor az ezek által meghatározott síkra merőlegesen kinyitott nagyujjunk mutatja a helyes irányt. Látható, ha fordított sorrendben tesszük ezt meg, akkor ellenkező irányt kapunk. Tehát a vektorszorzásnál nem mindegy a sorrend! A vektorszorzás antikommutatív.

Ajánlom, hogy próbálják ki a fent leírt módszert! Fontos, hogy ezt értsék, lássák, érezzék! Vizsgán ezt be kell mutatni, és szinte minden tételnél felbukkan…

Hogy megkülönböztessük a kétféle szorzást, a vektorszorzat esetében a két vektor közé egy ”×” jelet teszünk, és úgy mondjuk, hogy „kereszt”: pl. $\vec{A}\times\vec{B}$, kiejtve: „A kereszt B”.
Fontos hangsúlyozni, hogy a vektorszorzat eredménye egy vektor, amelynek iránya és nagysága van. Definíciója során mindkettő meghatározása fontos.

Gyakori hiba: „ $\vec{A}\times\vec{B} = ab\sin\alpha$ ” Ez így nem igaz, mert a baloldalon egy vektor van, míg a jobboldalon egy skalár (a vektor nagysága). Helyesen: $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = ab\sin\alpha$, azaz a szorzatvektor abszolút értéke (nagysága) egyenlő a két vektor nagyságának, és az általuk bezárt szög szinuszának szorzatával.

A vektorszorzat komponensenként:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \vec{C} \qquad \text{ahol} \qquad C_x = A_yB_z - A_zB_y, \quad C_y = A_zB_x - A_xB_z, \quad C_z = A_xB_y - A_yB_x$$

Levezetés:

$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k})\times(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}) =$$
$$A_x\vec{i}\times B_x\vec{i} + A_x\vec{i}\times B_y\vec{j} + A_x\vec{i}\times B_z\vec{k} +$$
$$A_y\vec{j}\times B_x\vec{i} + A_y\vec{j}\times B_y\vec{j} + A_y\vec{j}\times B_z\vec{k} +$$
$$A_z\vec{k}\times B_x\vec{i} + A_z\vec{k}\times B_y\vec{j} + A_z\vec{k}\times B_z\vec{k}$$

Az egymásra merőleges vektorok vektorszorzata:

$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$ és $\vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$

A párhuzamos egységvektorok vektorszorzata 0, (sin 90° = 0): $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0$

Tehát ami marad: $(A_yB_z - A_zB_y)\vec{i}, \quad (A_zB_x - A_xB_z)\vec{j}, \quad (A_xB_y - A_yB_x)\vec{k}$

Ezek az eredményül kapott vektor megfelelő *x, y, z* komponensei: $C_x\vec{i}, \quad C_y\vec{j}, \quad C_z\vec{k}$

Két vektor skalár (v. skaláris) ill. vektor (v. vektoriális) szorzata egy megállapodás szerinti definíció. Mint sok más matematikai művelet, fontos és hasznos segédeszköznek bizonyul a fizikai jelenségek leírásában.

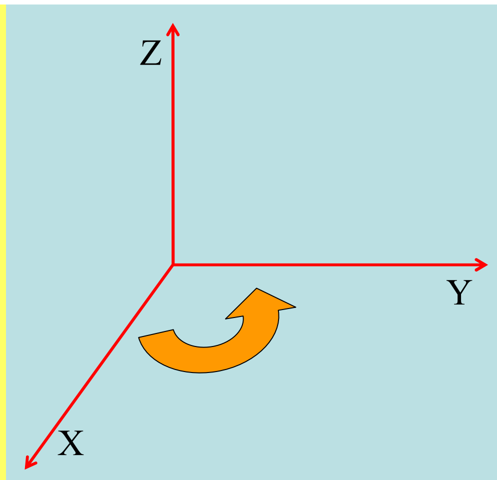
A skalár- és vektormennyiségek mellett a fizikában használunk még ún. tenzorokat is. A tenzor (érzékletesen, bár kissé slendrián módon) „többdimenziós vektor”-nak is nevezhető, ahol a „több” nyilván a 3-nál többet jelenti, ami gyakran 9. Ilyen pl. feszültségi tenzor, vagy a tehetetlenségi tenzor, melyek a későbbiekben említésre kerülnek.

Vonatkoztatási rendszer

Bármely test helyzete (így helyváltoztatása, mozgása is) csak más testekhez viszonyítva jellemezhető. Ebben az értelemben beszélünk **vonatkoztatási test**ről. A vonatkoztatási testhez/testekhez kötött koordináta-rendszert nevezzük **vonatkoztatási rendszer**nek. Az általunk leggyakrabban használt koordináta-rendszer, a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer:

Vonatkoztatási rendszer

A Descartes-féle vagy derékszögű koordinátarendszer <u>jobbsodrású</u>:



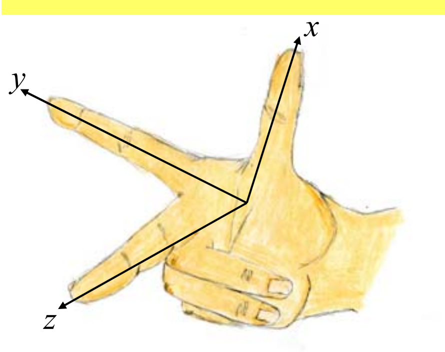
Az ábrán látható módon behajlított jobb kezünk 4 ujjának megfelelő forgásirányban (ez a + forgásirány, azaz az óramutató járásával ellentétes) az X tengelyt az Y-ba tudjuk forgatni.

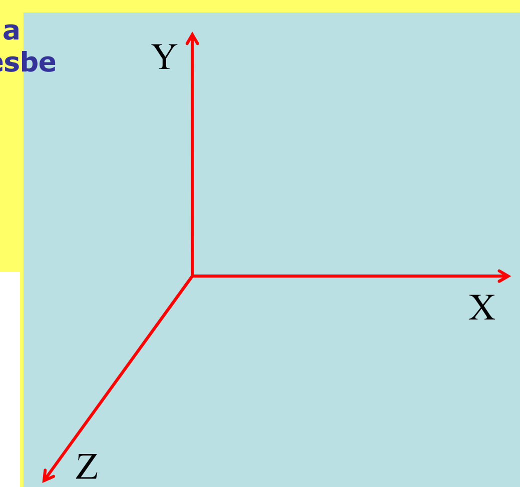
Vonatkoztatási rendszer

Vagy:

A jobb kezünk jelzett 3 ujja a megfelelő tengelyekkel fedésbe hozható

(balkézzel a tengelyek más sorrendben állnak!)





Vegyük észre, hogy csak az ujjak/tengelyek sorrendje a fontos, nem pedig az adott iránya! Pl. itt a baloldali rajzon a hüvelykujj (x tengely) mutat felfelé, míg a jobboldali koordinátarendszernél az y tengely. Ezek elforgatással fedésbe hozhatók. Egy balsodrású rendszerrel viszont nem.

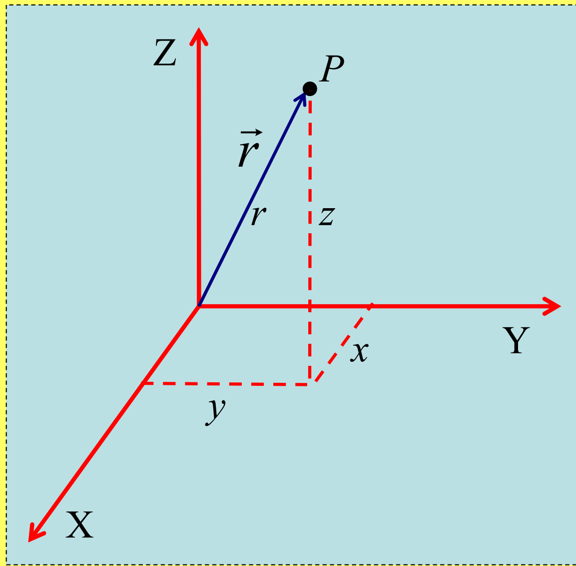
Ebben egy (P) pont helyét egyértelműen meghatározza az origóból hozzá húzott helyvektor ($\vec{r}$) három tengelyre eső vetületének nagysága.

Vonatkoztatási rendszer

$x = r\cos\alpha$
$y = r\cos\beta$
$z = r\cos\gamma$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Az r az $\vec{r}$ vektor nagyságát; x, y és z koordináták az $\vec{r}$ megfelelő tengelyekre eső vetületeinek nagyságát, míg α, β és γ, az $\vec{r}$ egyes tengelyekkel bezárt szögét jelentik.



$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (térbeli Pitagórasz tétel)

Vonatkoztatási rendszer

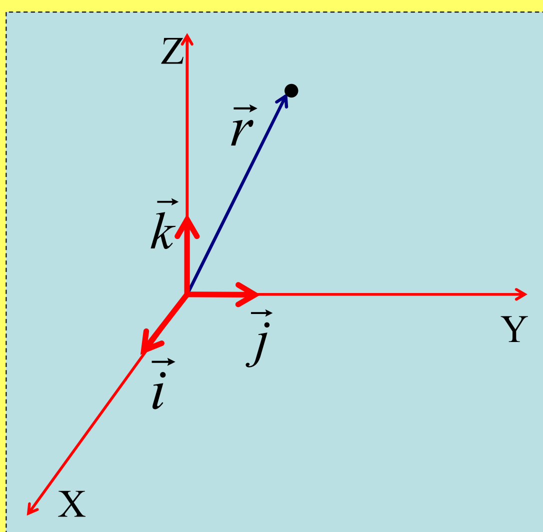
Az X, Y, Z tengelyek irányába mutató

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

egységvektorok bevezetésével az $\vec{r}$ helyvektort a következő alakban írhatjuk fel:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Lásd vektorok összeadása!



Az egységvektor egy egységnyi hosszúságú vektort jelent, amely az adott irányba mutat. Hagyományos jelöléssel az X, Y, Z tengelyek irányába sorban az $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ egységvektorok mutatnak.

Léteznek másfajta koordinátarendszerek is. Ilyen pl. a gömbi polárkoordinátás vagy hengerkoordinátás leírás. Némely feladatban ezeket célszerűbb használni.

Az anyagi pont kinematikája

A kinematika csak azzal foglalkozik, hogy **hogyan** mozognak a testek (tehát a „hogyan”-ra keresi a választ), az okokkal nem foglalkozik (a „miért”-re nem kérdez). Ez majd a dinamika feladata lesz.

Az **anyagi pont** v. **tömegpont** egy absztrakció (elvonatkoztatás). Mindig az adott probléma határozza meg, hogy mit tekinthetünk pontszerűnek. Pl. a Nap körüli keringését tekintve egy bolygó jó közelítéssel pontszerűnek tekinthető, de egy kétatomos molekula már nem, ha az energiatároló szabadsági fokaival számolunk, mondjuk a fajhőjének meghatározásakor.

Pálya, elmozdulás, út

Kinematika

Az anyagi pont mozgását akkor tekintjük ismertnek, ha meg tudjuk adni a helyét bármely *t* időpillanatban, azaz ha ismerjük az

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

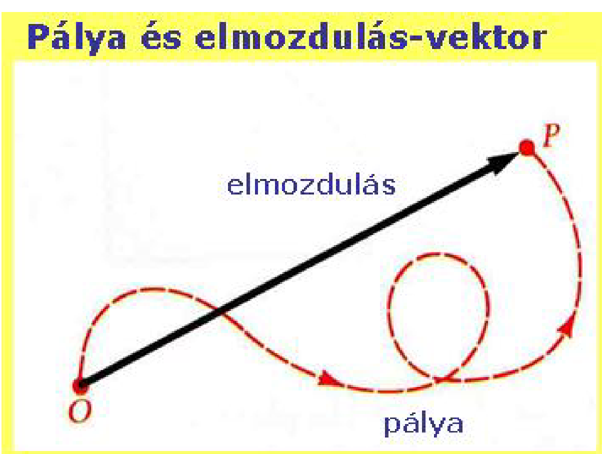
ill. komponensenként az

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t)$$

függvényeket.

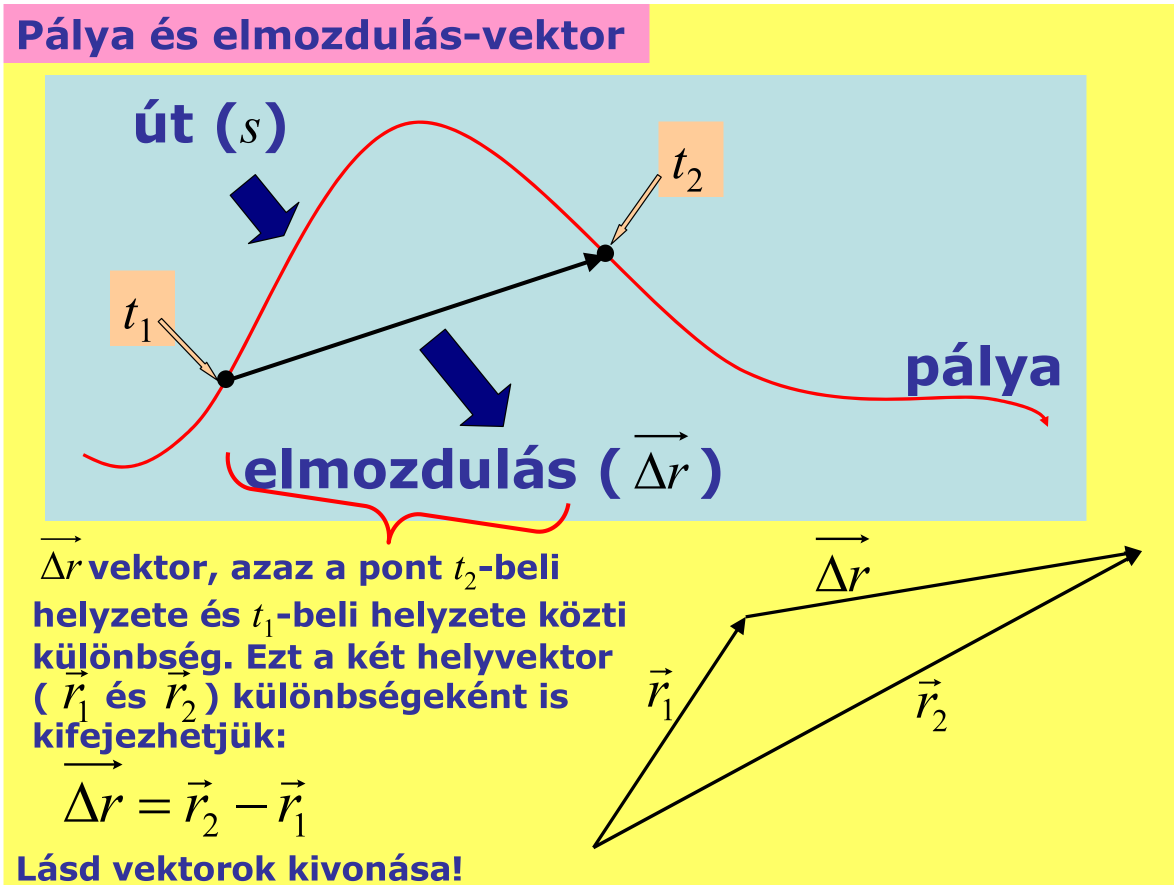
Ezek az egyenletek egyértelműen meghatározzák a tömegpont pályáját, azaz a mozgása során leírt térbeli görbét.

Ezek a **kinematikai mozgásegyenletek**.



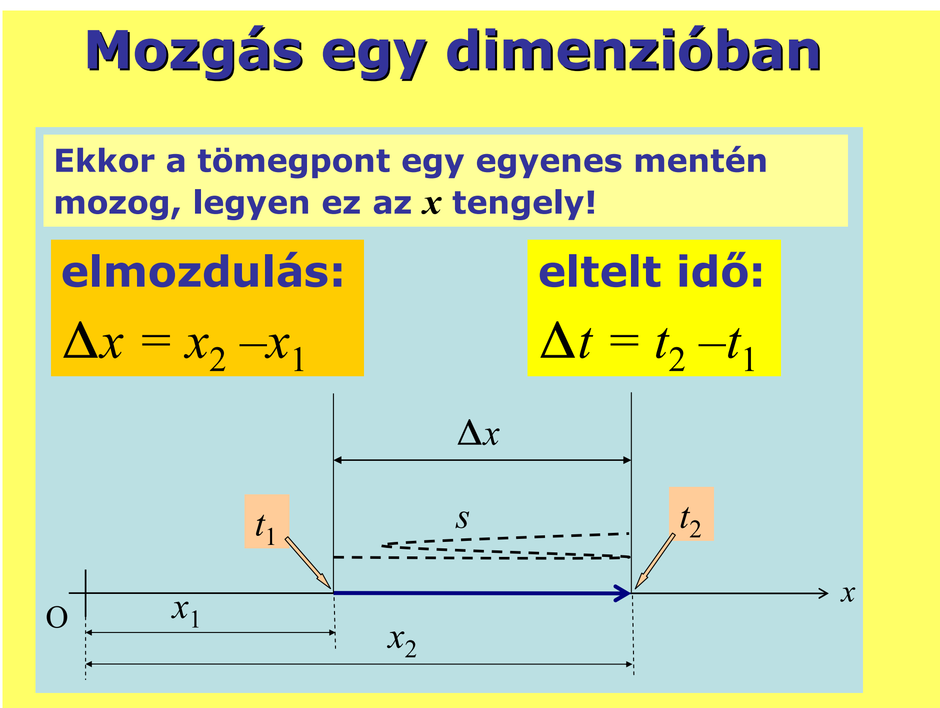
Látható, hogy a pályán megtett út mérőszáma nem azonos az elmozdulás mérőszámával. Másrészt az elmozdulás vektormennyiség, míg az út skalár.

Fontos ez a különbségtétel!



Mozgás egy dimenzióban

Az egyszerűbb tárgyalás miatt, nézzük először az egydimenziós mozgást! Később ezt kiterjesztjük több (2 ill. 3) dimenzióra is. Egydimenziós mozgás során a test egy egyenes vonal mentén mozog.



Az ábrán a szaggatott vonallal jelölt s az összes utat jelenti, azaz, ha pl. a test oda-vissza mozog a kérdéses időintervallum alatt, akkor az oda-vissza utakat, együtt, összesen számoljuk.

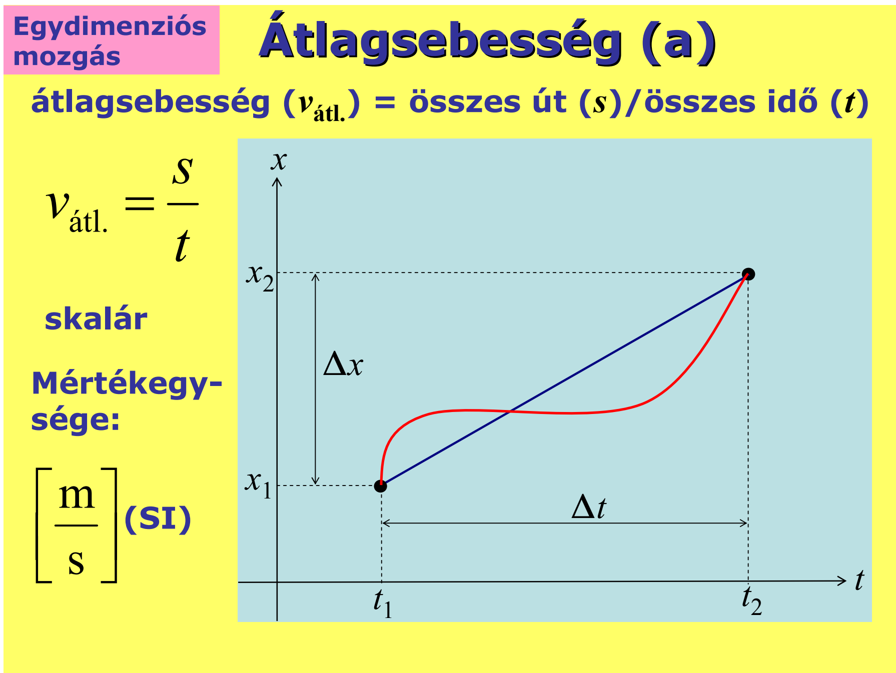
A Δx az elmozdulás végső eredményét jelenti, tehát azt, hogy a kezdeti ponttól milyen messze jutottunk el Δt idő alatt.

Sebesség

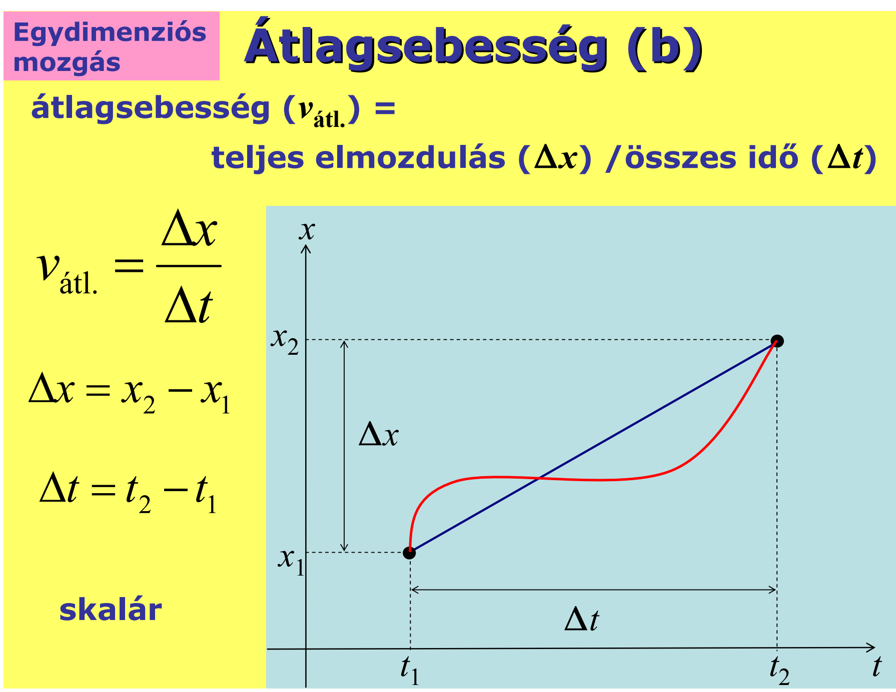
A test (mostani tárgyalásunkban anyagi pont) mozgására jellemző, hogy adott távolságot (utat) mennyi idő alatt tesz meg, ezt a sebességgel jellemezzük. A sebesség kissé pontatlan, de első közelítésben a lényeget tükröző megfogalmazása: út / idő. Mértékegysége a m/s, (SI) vagy km/h, mérföld/h, stb.

A pontosabb megfogalmazáshoz vezessük be az ún. átlagsebesség fogalmát!

Ezt is lehet két értelmezésben használni, hogy adott estben melyiket értjük, ez általában a szövegkörnyezetből kiderül.

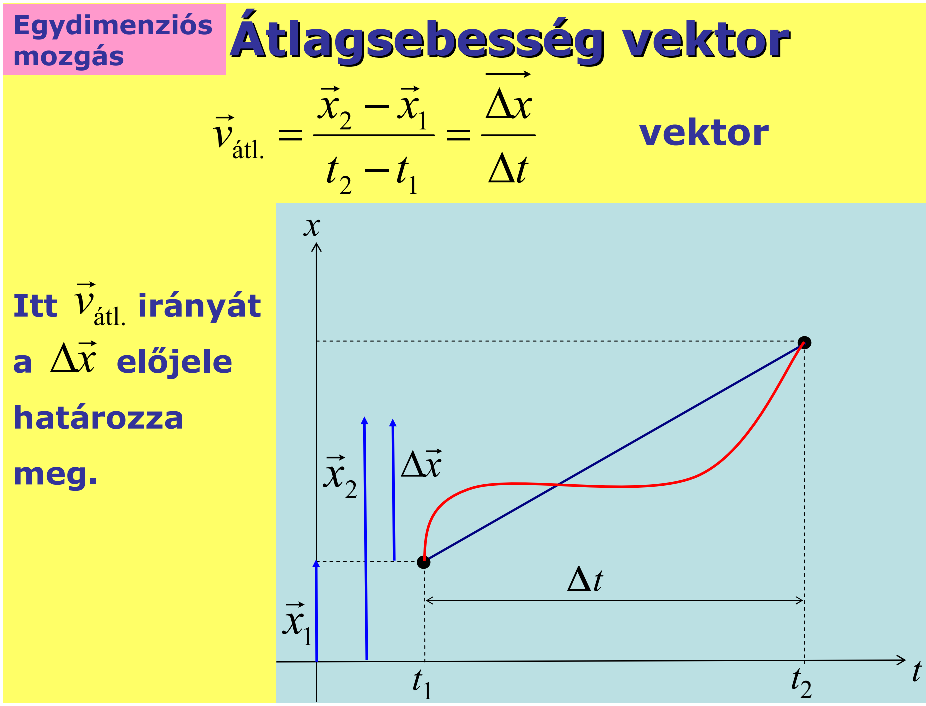


Itt az összes út (s) azt jelenti, hogy ha pl. a test oda-vissza is mozog (a mozgása során vissza is fordulhat) a kérdéses időintervallum alatt, akkor az oda-vissza utakat, együtt, összesen számoljuk. Az összes idő pedig, a közben eltelt idő (Δt).



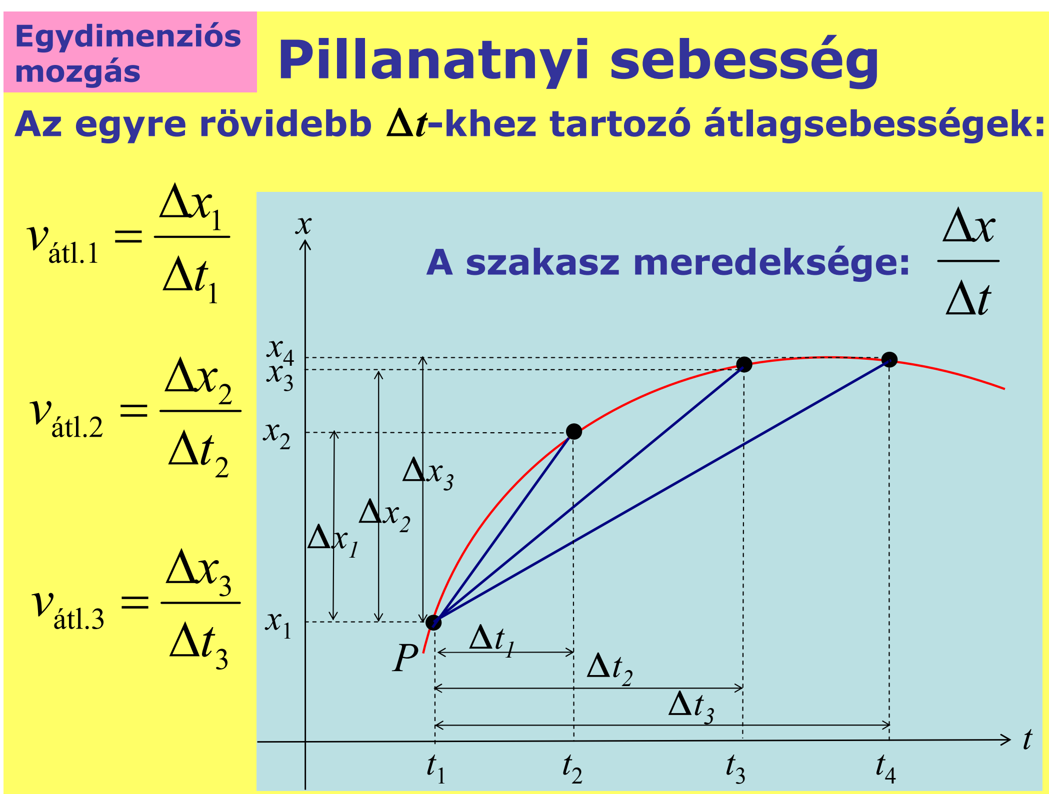
Itt a teljes elmozdulás (Δx) azt jelenti, hogy ha pl. a test oda-vissza is mozogna a kérdéses időintervallum alatt, akkor is csak végső helyzet és a kezdeti helyzet közti különbséget számoljuk. Az összes idő itt is a közben eltelt idő (Δt).

Az utóbbi értelmezés (b) a gyakoribb. Ekkor a sebesség nagyságát az $x - t$ grafikonon a kezdeti és a végső pontjára fektetett egyenes meredeksége vagy másképpen iránytangense adja meg ($\Delta x/\Delta t$).

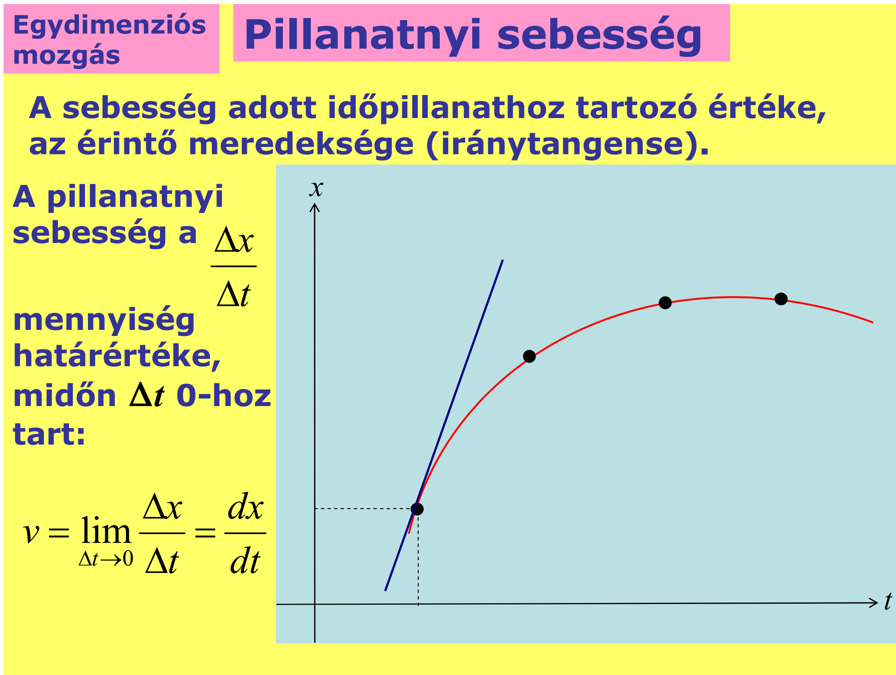


Ha pontosak és korrektek akarunk lenni, akkor az elmozdulást vektornak tekintjük és írjuk. Egydimenziós mozgásnál az irányt a Δx előjele egyértelműen megadja. Ez határozza meg az átlagsebesség irányát is.

Ha mi arra vagyunk kíváncsiak, hogy a tömegpont mekkora sebességgel mozog egy bizonyos pontban, vagy egy adott időpillanatban, akkor a sebesség pillanatnyi értékére van szükségünk. Ez a pillanatnyi sebesség. A kitérés – idő grafikonon, ezt a görbe két pontjára fektetett egyenesek meredekségével közelítjük, midőn a szomszédos pontok távolságát egyre csökkentjük. Határértékben az érintőhöz jutunk.



A pillanatnyi sebesség nagyságát a kitérés – idő grafikonon, a görbéhez az adott pontban húzott érintő meredeksége (iránytangense) adja meg.



Tehát, itt a (pillanatnyi) sebesség, az x kitérés idő szerinti differenciálhányadosa, vagy deriváltja:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

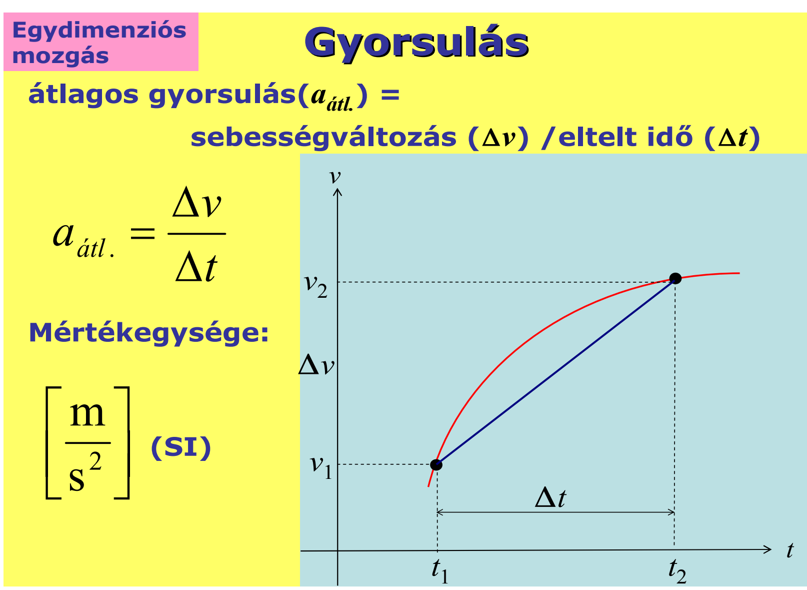
A differenciálhányados jelentése az, hogy az adott mennyiség hogyan változik. A változást (a fizikában és másutt is) differenciálhányadosokkal tudjuk leírni.

A differenciálhányados bővebb és pontosabb jelentését a matematikai tanulmányok során megismerik. Az idő szerinti differenciálhányadost szokás még a mennyiség fölé tett ponttal is jelölni: $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$

Pontosabban és precízebben a pillanatnyi sebesség is vektormennyiség, még egydimenziós mozgás esetén is: $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$. Iránya a mozgás (elmozdulás) irányába mutat.

Gyorsulás

A gyorsulás a sebesség megváltozásának mértéke. Azt mutatja meg, hogy milyen sebességgel változik a sebesség. A gyorsulás kissé pontatlan, de első közelítésben a lényeget tükröző megfogalmazása:



sebesség / idő (v / t).

Mértékegysége a m/s^2, (SI).

A pontosabb megfogalmazáshoz vezessük be az ún. átlaggyorsulás fogalmát!

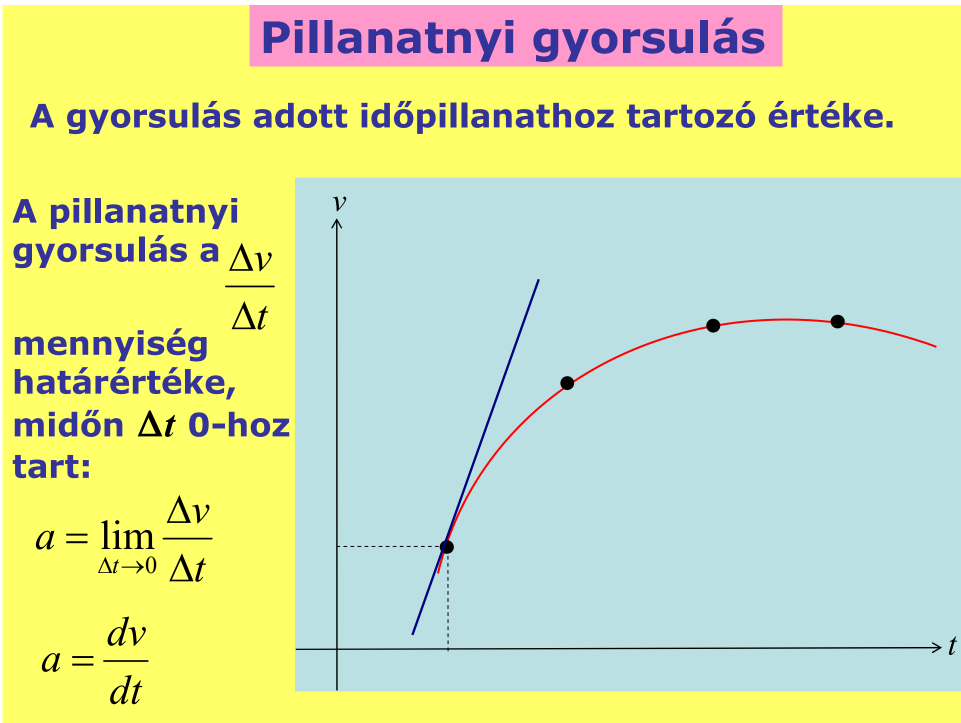
Ez egy adott Δt időintervallum alatt történő sebességváltozás mértékére utal.

Az átlagos gyorsulás nagyságát a sebesség – idő (v – t) grafikonon a mozgás kezdeti és a végső pontjára fektetett egyenes meredeksége vagy másképpen iránytangense adja meg ($\Delta v/\Delta t$).

Ez a sebesség**változás** / eltelt idő.

Korrektebb és pontosabb megfogalmazásban az átlaggyorsulás is vektor (még egydimenziós esetben is), irányát a sebesség**változás** iránya határozza meg. Azaz, ha a sebesség csökken, akkor a gyorsulás iránya ellentétes a sebesség irányával.

$$\vec{a}_{átl.} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$$



A pillanatnyi gyorsulás nagyságát a sebesség – idő grafikonon, a görbéhez az adott pontban húzott érintő meredeksége (iránytangense) adja meg.

Tehát a gyorsulás a sebesség idő szerinti differenciálhányadosa (más szóval deriváltja).

Tekintve, hogy a sebesség a kitérés idő szerinti deriváltja, adódik, hogy a gyorsulás a kitérés idő szerinti 2. differenciálhányadosa (deriváltja):

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Az idő szerinti 2. differenciálhányadost szokás még a mennyiség fölé tett két ponttal is jelölni: $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$

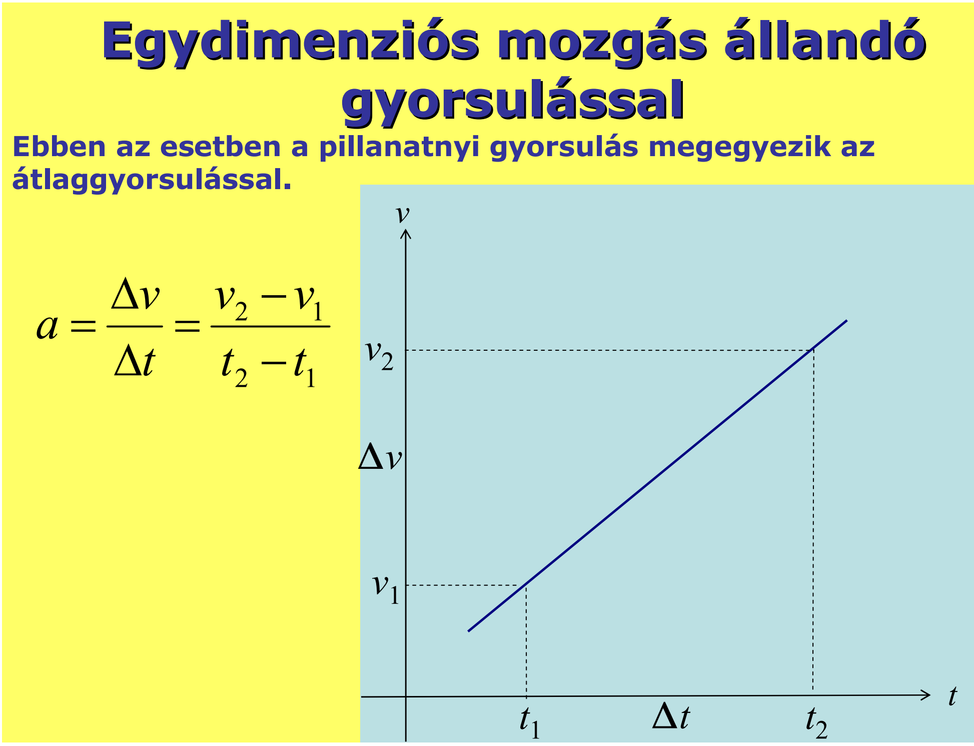
A pillanatnyi gyorsulás is vektormennyiség. Iránya a sebesség**változás** irányába mutat.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

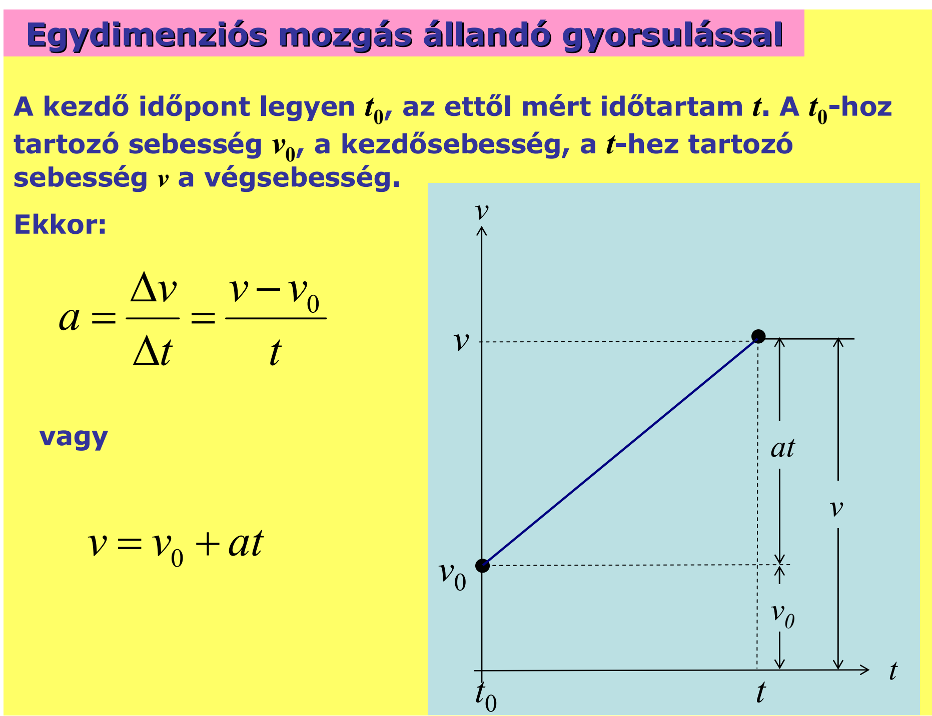
Egydimenziós mozgásnál a sebesség csökkenésekor fellépő gyorsulást negatív előjellel látjuk el. Ekkor a sebesség iránya pozitív, de ha nagysága csökken, akkor a változása negatív, ezért negatív a gyorsulás is. Ezt „lassulás”-nak is lehet nevezni.

Egydimenziós mozgás állandó gyorsulással

Ha a gyorsulás változik az időben a mozgás bonyolult. Egyszerűbb az állandó gyorsulás esetét vizsgálni.



Ekkor a sebesség – idő grafikon egy egyenes. Itt az egyenes meredeksége, vagy iránytangense adja meg a gyorsulás mértékét.



Ha $t_0 = 0$, akkor $t - t_0 = t$. Így egyszerűbben írhatjuk az egyenleteinket.

A $v = v_0 + at$ összefüggés lehetővé teszi, hogy a sebességet megadjuk bármely t időpontban, ha ismert a kezdősebesség és a gyorsulás.
A végsebesség (v) a kezdősebesség (v_0) és a sebesség megváltozásának (at) összege.

Ha a sebesség csökken ($v < v_0$), akkor a gyorsulás negatív. Az egyenes meredeksége (iránytangense) negatív érték.

Nézzük az $a - t$, a $v - t$, és az $x - t$ grafikonokat egymás alatt!

Egydimenziós mozgás állandó gyorsulással

gyorsulás – idő (a - t) grafikon:

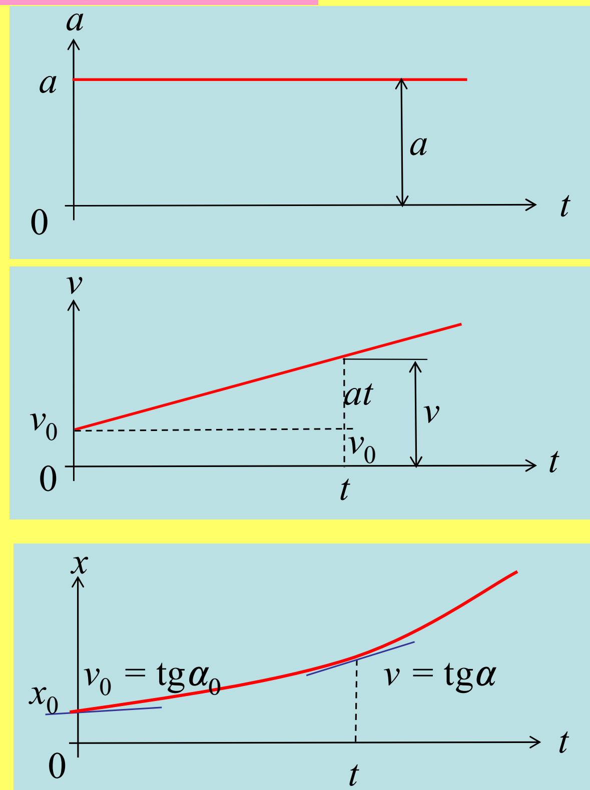
$$a = \text{const.}$$

sebesség – idő (v - t) grafikon:

$$v = v_0 + at$$

kitérés – idő (x - t) grafikon:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$



Az $a - t$ grafikon egy vízszintes egyenest mutat, mert a gyorsulás az időben végig állandó.

A $v - t$ grafikon egy ferde egyenest mutat, ahol az egyenes meredekségét az a nagysága adja meg.

Az $x - t$ grafikonon egy másodfokú görbét (parabola) látunk, ahol bármely időpontban a görbéhez húzott érintő meredeksége adja meg a sebesség nagyságát. Pl. $t_0 = 0$ esetén $\text{tg}\alpha_0 = v_0$, és ált. $v = \text{tg}\alpha$.

További hasznos összefüggésekhez jutunk, ha meggondoljuk, hogy állandó gyorsulás esetén a kezdősebesség és a végsebesség átlaga adja az átlagsebességet.

Egydimenziós mozgás állandó gyorsulással

Az átlagsebesség: $v_{\text{átl}} = \dfrac{v_0 + v}{2}$

Az elmozdulás: $\Delta x = v_{\text{átl}} \Delta t = \left(\dfrac{v_0 + v}{2}\right)t$

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v + v_0)t$$

$v = v_0 + at$

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v_0 + at)t$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

A helykoordináta az idő fgv.-ében.

Könnyen beláthatjuk a fenti összefüggés érvényességét, ha x –et idő szerint differenciáljuk:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2) = v_0 + at$$

Egydimenziós mozgás állandó gyorsulással

Az időt kiküszöbölve:

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v + v_0)t \qquad v = v_0 + at \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)\left(\frac{v - v_0}{a}\right) = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

vagy:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

A sebesség az elmozdulással és a gyorsulással kifejezve.

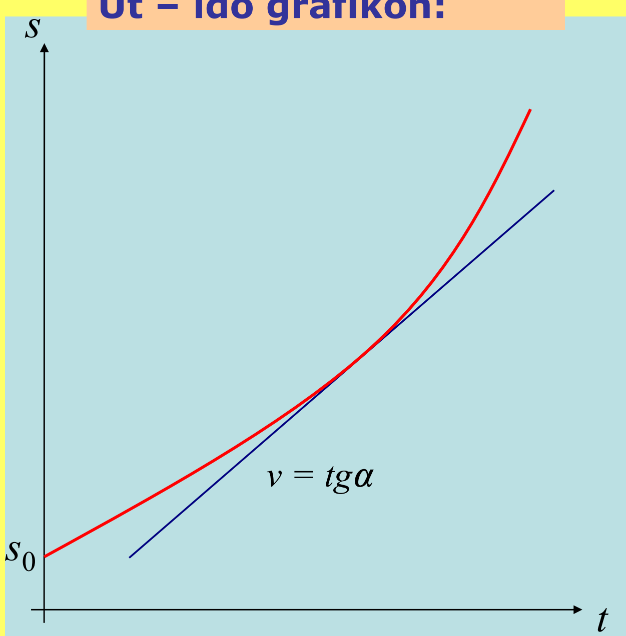
Egydimenziósban mozgó test állandó gyorsulással

Gyakran az x helyett s szerepel:

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Az út - idő fgv. adott pontjához húzott érintő meredeksége adja a (pillanatnyi) sebességet az adott pontban.

Út – idő grafikon:

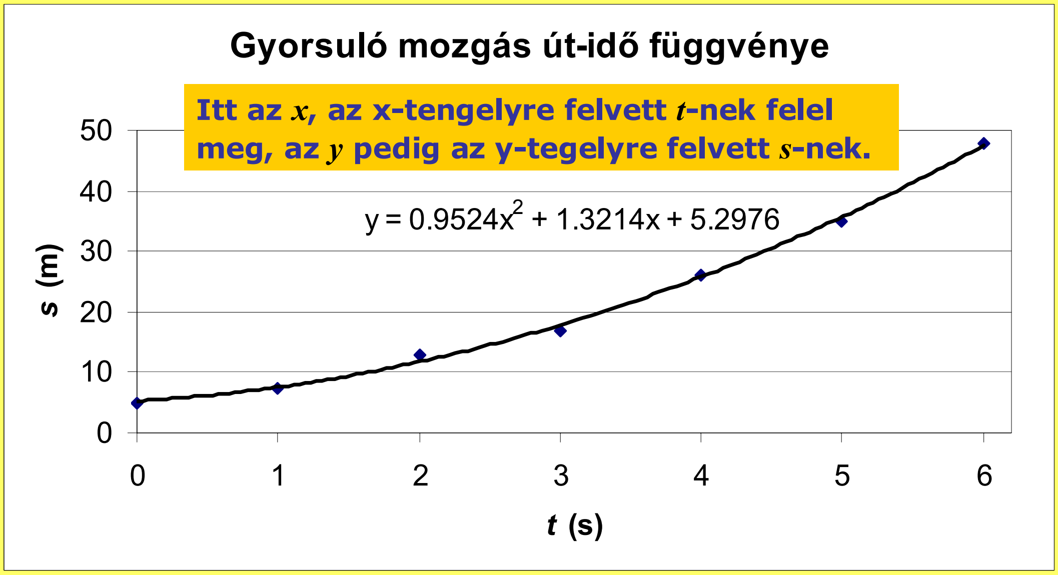


A Fizika laboratóriumi gyakorlat keretében megmérjük az egyenletesen gyorsuló test út-idő, ill. sebesség-idő függvényeit. Az alábbi ábrák ezt mutatják.

Egydimenzióban mozgó test állandó gyorsulással

Pl. fizika labor gyak:

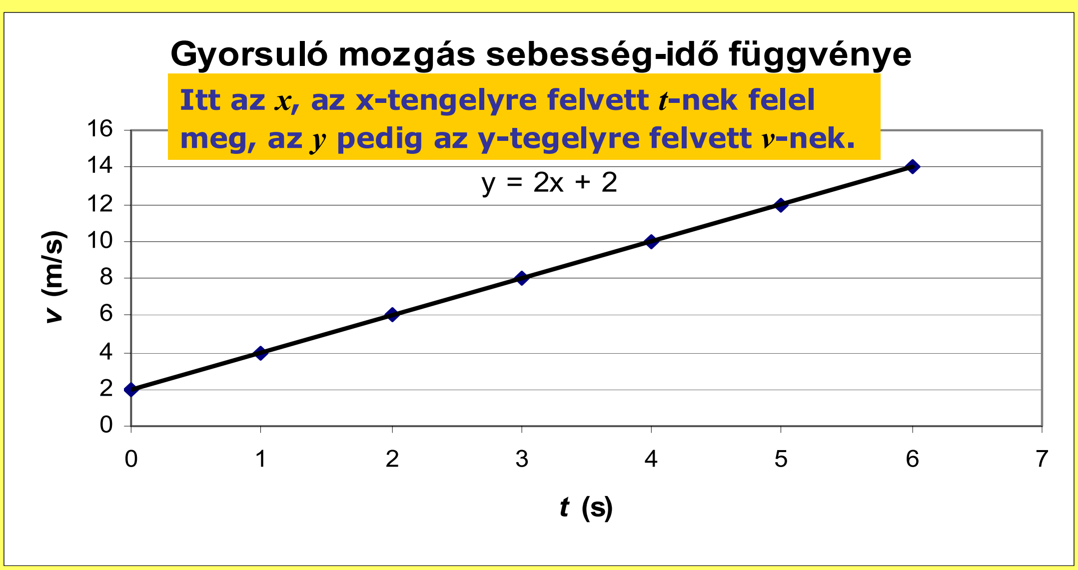
$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$



Egydimenzióban mozgó test állandó gyorsulással

Pl. fizika labor gyak:

$$v = v_0 + at$$



Egydimenziós mozgás állandó gyorsulással

Ha az állandó gyorsulás 0, azaz nincs gyorsulás: $v = v_0$

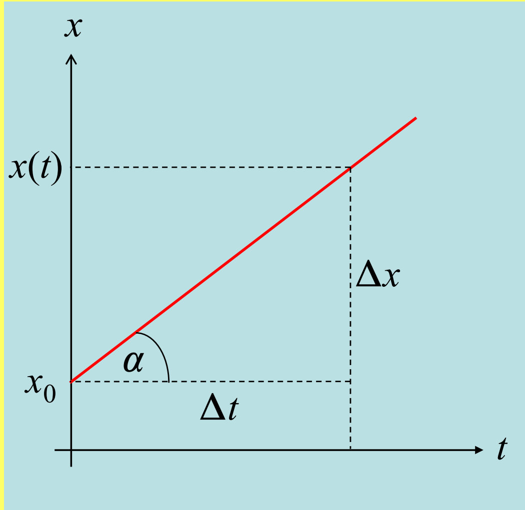
Egyenes vonalú, egyenletes mozgás: a tömegpont egyenes vonalú pályán, egy irányba haladva, egyenlő idők alatt egyenlő utakat tesz meg.

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$x = x_0 + vt$$

***v* a hely – idő fgv. grafikonjának meredeksége (iránytangense):**

$$v = \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$



Nyilván ebben az esetben a pillanatnyi sebesség megegyezik az átlagsebességgel:

$$v = v_{átl}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Egyenes vonalú, állandó gyorsulással mozgó test kinematikai mozgásegyenletei (összefoglalás):

$$v = v_0 + at$$ **a sebesség mint az idő fgv.-e**

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v + v_0)t$$ **az elmozdulás, mint a sebesség és az idő fgv.-e**

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$ **az elmozdulás, mint az idő fgv.-e**

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$ **a sebesség, mint az elmozdulás fgv.-e**

Számolásnál, feladatmegoldásnál hasznos, ha ezeket megjegyezzük, vagy legalább gyorsan le tudjuk vezetni. A jobb megértéshez elengedhetetlen, hogy feladatokon gyakoroljunk!

Néhány szemléletes módszer a kinematika köréből

Sokszor előforduló feladat, hogy a sebességnek (mint az idő függvényének) ismeretében, az utat kell meghatározni.

Ha a sebesség állandó, a t_1-től t_2-ig megtett út: $\Delta x = v\Delta t$, (ahol $\Delta t = t_2 - t_1$).

Általános esetben közelítő eljárást alkalmazhatunk, azaz a t_1, t_2 intervallumot olyan kis Δt_i részintervallumokra osztjuk, hogy ezen belül a sebességet állandónak vehetjük. Ekkor:

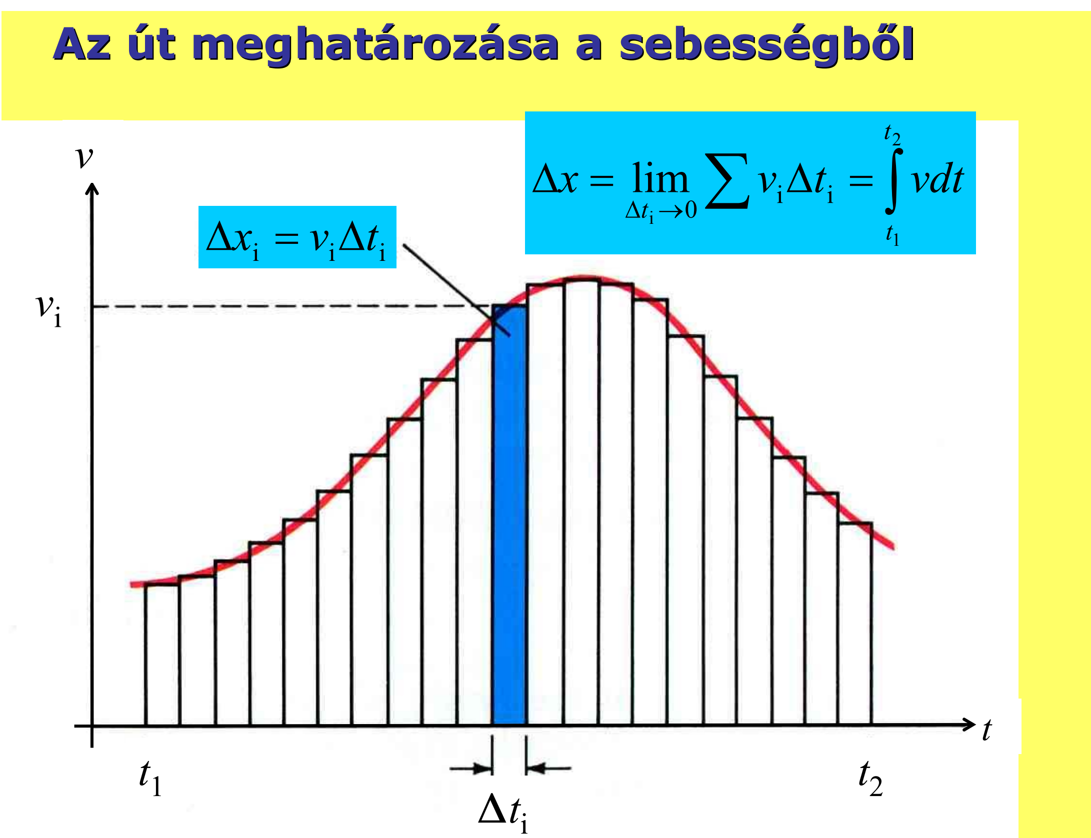
$\Delta x_\mathrm{i} \approx v_\mathrm{i}\Delta t_\mathrm{i}$, ahol v_i a Δt_i intervallum egy tetszőleges pontjához tartozó sebesség. Ez, az ábrán, a kék oszlop területének a mérőszámával egyezik meg. (Az ábra a sebesség – idő grafikont mutatja.)

Az így kapott utakat összegezzük: $\Delta x = \sum \Delta x_\mathrm{i} \approx \sum v_\mathrm{i}\Delta t_\mathrm{i}$

Ez azt jelenti, hogy az ábrán az összes kis téglalap területét összeadjuk, „szummázzuk”. Ezzel az összeggel a görbe alatti terület mérőszámát közelítjük. Pontosabb az eredmény, ha finomabb a beosztás, azaz Δt_i egyre kisebb. A fenti közelítő összegek, a beosztás minden határon túli finomításához tartozó határértéke a pontos eredmény, azaz a görbe alatti terület mérőszáma, ami a megtett út mérőszámával lesz egyenlő: $\Delta x = \lim\limits_{\Delta t_\mathrm{i} \to 0} \sum v_\mathrm{i}\Delta t_\mathrm{i} = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt$

Az út a sebesség idő szerinti határozott integrálja.

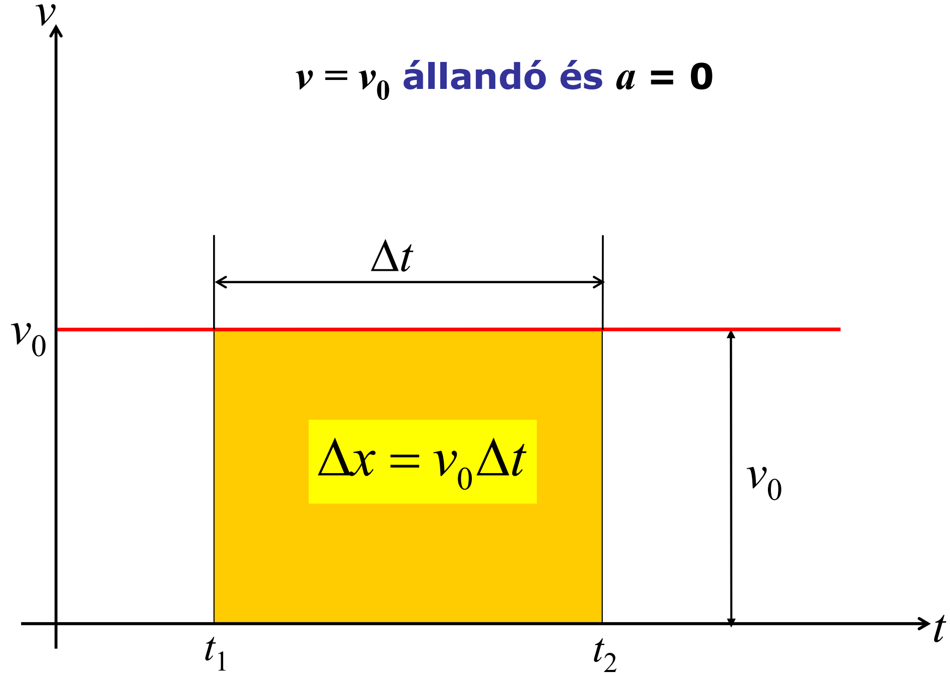
Pontosabban az elmozdulást kéne írni az út helyett, mert a *v* lehet negatív is. Az integrál jelentését, definícióját, valamint műveleteit a matematikai tanulmányok során megismerik.



Vegyünk pl. egy állandó sebességgel haladó testet. Ekkor a $v - t$ grafikon egy vízszintes egyenes lesz. Az egyenes alatti terület, azaz a téglalap területe, megadja a $t_2 - t_1$ időintervallum alatt megtett távolságot.

Az út meghatározása a sebességből

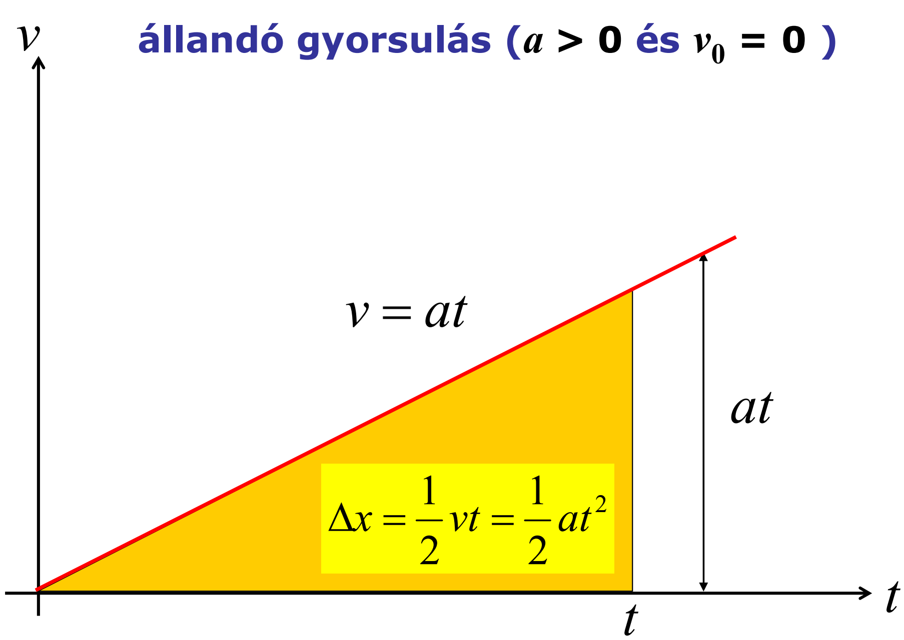
Példa 1.



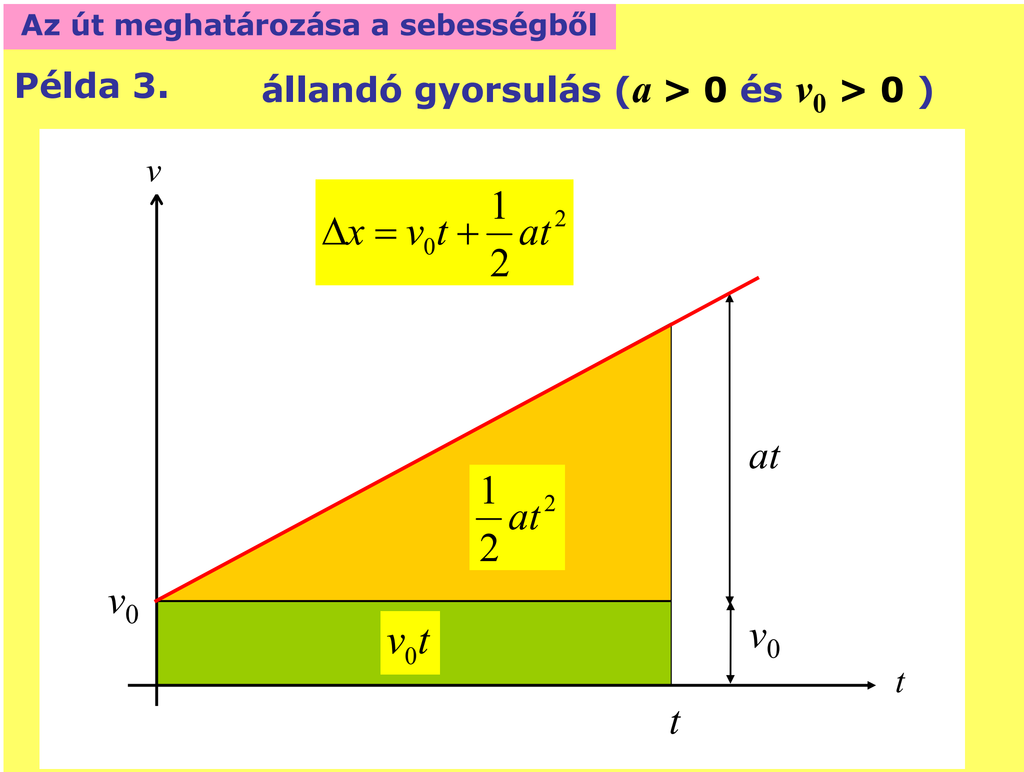
Ha a sebesség az idő lineáris függvénye, azaz $v = at$, (ahol a = állandó), a $v - t$ grafikon egy ferde egyenes lesz. Az egyenes alatti terület, azaz a háromszög területe, megadja a t_1 - 0 időintervallum alatt megtett távolságot. Itt a kezdősebesség 0 (t = 0-nál, v = 0), és Δt helyett egyszerűen csak t-t írunk.

Az út meghatározása a sebességből

Példa 2.

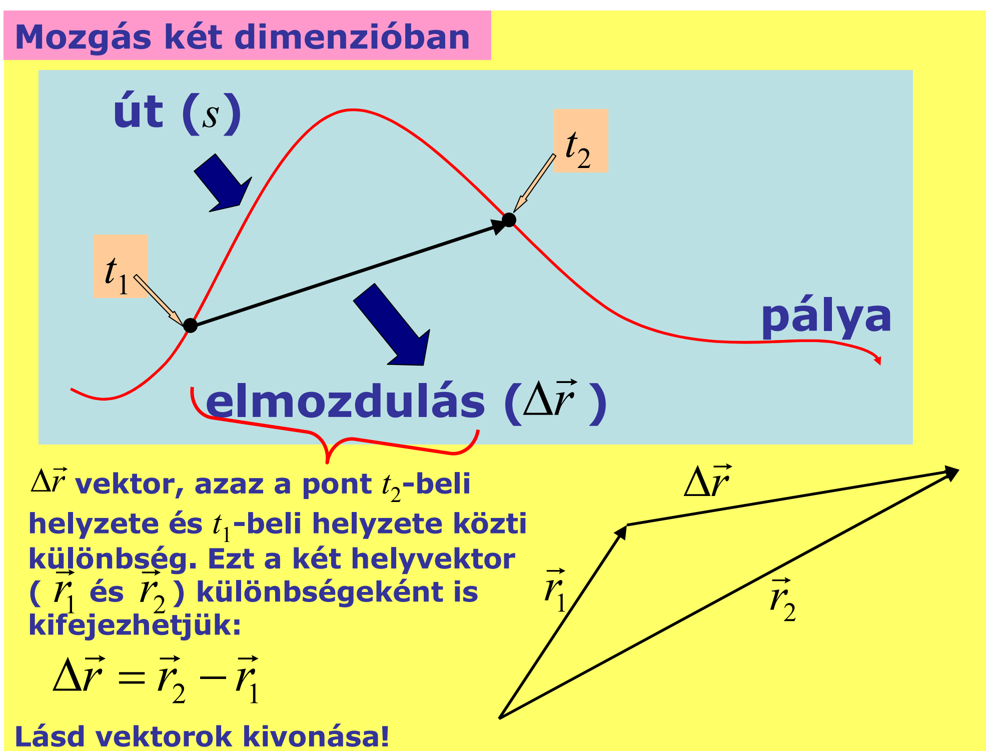


Ha a kezdősebesség nem 0, hanem egy zérustól különböző v_0 ($t = 0$-nál, $v = v_0$) a $v - t$ grafikon szintén egy ferde egyenes lesz, amely most a függőleges tengelyt nem a nullánál, hanem a v_0-nál metszi. Itt az egyenes szakasz alatti terület: a háromszög területe + a téglalap területe. Ez adja meg a 0-tól t-ig mért idő alatt megtett távolságot.



Mozgás két dimenzióban

A két dimenzióban, vagy síkban történő mozgás esetén sokkal jobban kidomborodik a sebesség és a gyorsulás vektor jellege. Az itt megismert szabályokat könnyen kiterjeszthetjük három dimenzióra is.



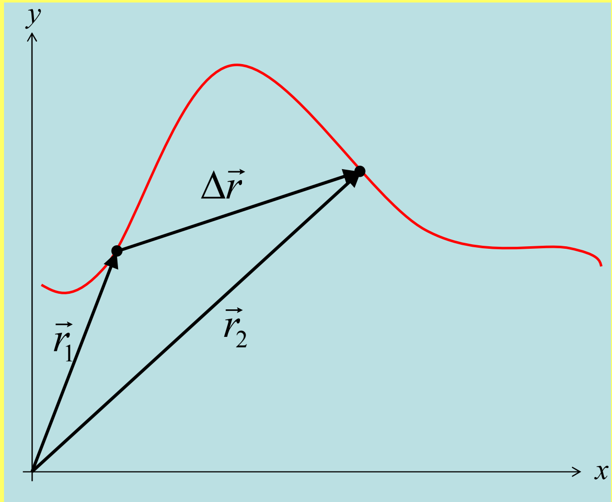
Korábban már láttuk ezt az ábrát.

Most nézzük meg, hogyan vezethetjük le a sebességet az elmozdulásvektorból!

Mozgás két dimenzióban

Ekkor az átlagsebesség:

$$\vec{v}_{\text{átl}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$



Az átlagsebesség az elmozdulás(vektor) és az eltelt idő hányadosa. Mivel az elmozdulás vektor, ezért a belőle egy skalárral (Δt) történő osztással képzett mennyiség is vektor. Tehát az átlagsebesség is vektor. Iránya az elmozdulásvektor irányával egyezik meg.

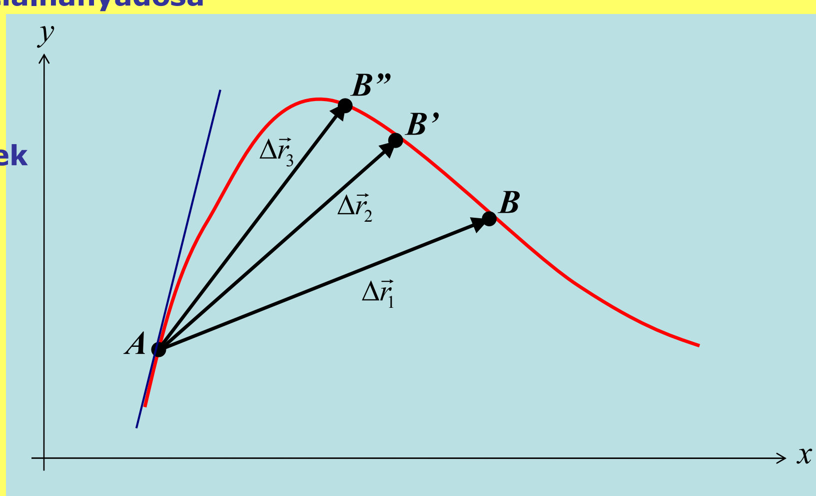
Mozgás két dimenzióban

A különbségvektort egyre kisebbre véve határértékben az érintőhöz jutunk.

A pillanatnyi sebesség: $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

A sebesség, a helyvektor időszerinti (első) differenciálhányadosa

Iránya a pálya érintőjének irányába mutat.



„Vektoros” esetben is az előzőhöz hasonlóan járunk el, ha a pillanatnyi sebességet akarjuk definiálni. Az elmozdulásvektor és az időtartam egyre kisebb értékeihez rendelhető hányadosok egy határértékhez tartanak.

Ez a **helyvektor idő szerinti** (első) **differenciálhányadosa**.

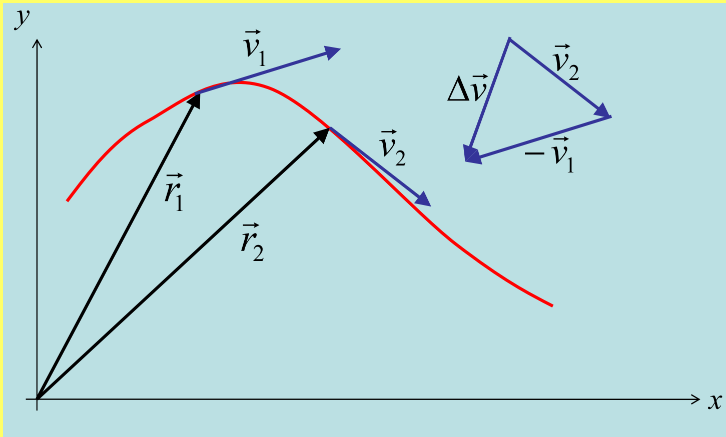
Ez a pillanatnyi sebesség pontos definíciója. Innentől, ha „csak” sebességről beszélünk, akkor ezt értjük alatta. (Ha az átlagsebességről, vagy csak a sebesség nagyságáról beszélünk, azt mindig külön jelezzük.)

A vektorok differenciálásáról a matematikai tanulmányok során tanul(hat)nak bővebben. Számunkra most az a lényeg, hogy ez a differenciálhányados jellemzi a vektor változását (akár irány, akár nagyság szerint).

Mozgás két dimenzióban

Az átlaggyorsulás: $\vec{a}_{\text{átl}} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

Iránya $\Delta\vec{v}$ irányába mutat.



Az átlaggyorsulás a sebesség (mint vektor) megváltozásának és az eltelt időnek a hányadosa. Mivel a sebesség vektor, ezért a belőle egy skalárral (Δt) történő osztással képzett mennyiség is vektor. Tehát az átlaggyorsulás is vektor. Iránya a sebességváltozás vektor irányával egyezik meg.

Mozgás két dimenzióban

A pillanatnyi gyorsulás

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \left(= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right)$$

A gyorsulás a sebesség idő szerinti első differenciálhányadosa.

(vagy a helyvektor idő szerinti második differenciálhányadosa)

Fontos megjegyezni, hogy gyorsulás lép fel akár a sebesség nagysága, akár az iránya változik.

A pillanatnyi gyorsulás a **sebesség idő szerinti** (első) **differenciálhányadosa**. Ez a pillanatnyi gyorsulás pontos definíciója. Innentől, ha „csak" gyorsulásról beszélünk, akkor ezt értjük alatta. (Ha az átlag-gyorsulásról, vagy csak a gyorsulás nagyságáról beszélünk, azt mindig külön jelezzük.)

Háromdimenzióban:

helyvektor: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

sebesség: $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$

gyorsulás: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

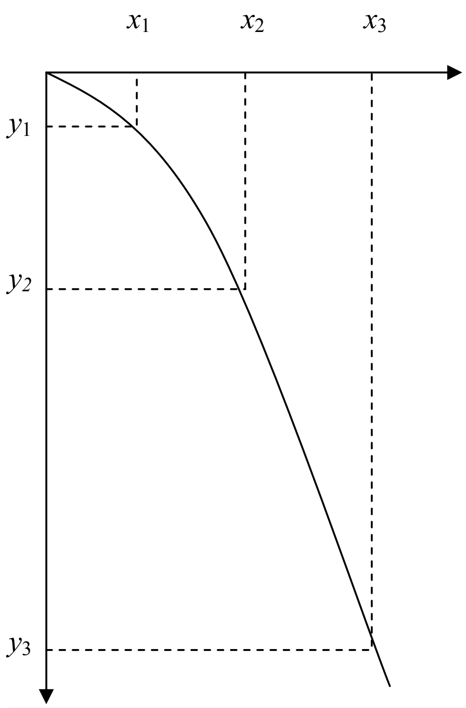
Három dimenzióban a hely-, sebesség-, és gyorsulásvektoroknak 3 komponense van. Ezt jelölhetjük a tér 3 irányának megfelelő egységvektorokkal.

Számolási feladatoknál ne felejtsük el az egyes komponenseknél feltüntetni a megfelelő mértékegységet!

Ferde hajítás

Kezdjük a ferde hajítás egy speciális esetével, a **vízszintes hajítás**sal!

Kísérlet: (közel) azonos kiindulópontból ejtsünk el egy vasgolyót, egy másikat pedig lökjük meg v_0, vízszintes irányú kezdősebességgel! Mérjük az azonos időközök alatt megtett vízszintes (x), és függőleges (y) irányban megtett utakat! Az elejetett golyó az y tengely mentén függőlegesen lefelé esik, míg a másik az ábrán látható görbe vonalú pályán haladva közelít a talaj felé.



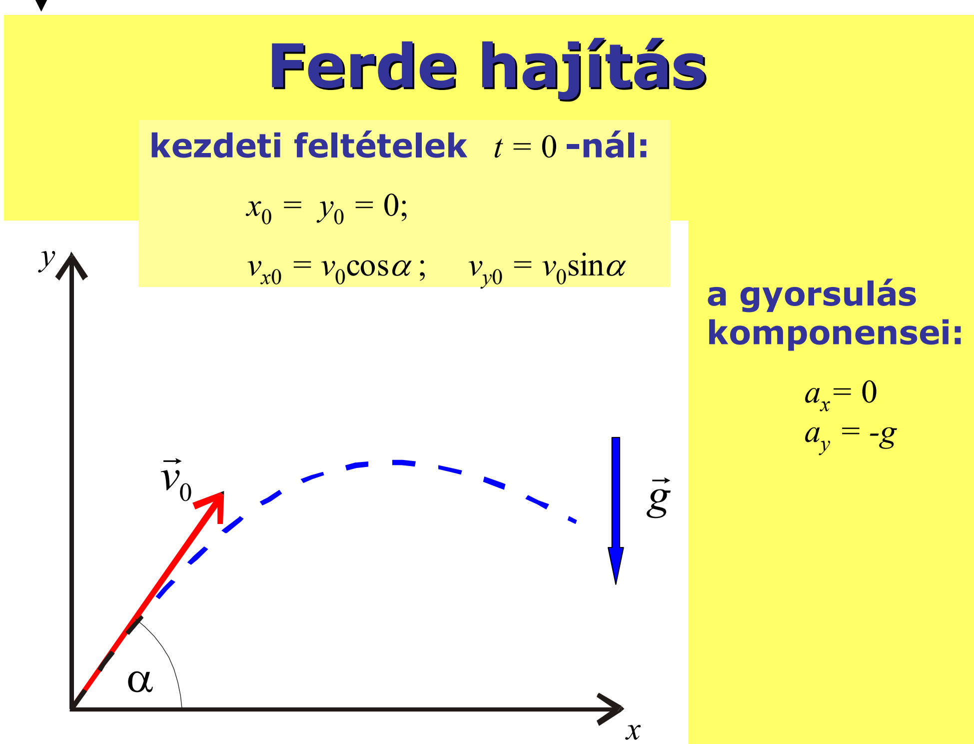
Ekkor: $t_1 : t_2 : t_3 = 1 : 2 : 3$

$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 2 : 3$

$y_1 : y_2 : y_3 = 1 : 4 : 9$

Látható, hogy a pálya egy vízszintes irányú egyenletes mozgás, $x = v_0t$, és egy függőleges irányú egyenletesen gyorsuló mozgás, $y = -kt^2$ (ahol $k = 0{,}5\ g$) szuperpozíciója (összetétele).

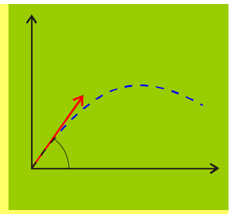
Látható, hogy a vízszintes mozgás nem befolyásolja a függőleges irányút, a két golyó mindig azonos magasságban van.



Ferde hajításról beszélünk akkor, ha egy testet (tömegpontot) valamilyen kezdősebességgel (v_0), a vízszintessel α szöget bezáróan elhajítunk a Föld homogénnek vehető gravitációs terében. (Tágabban véve elég kikötni, hogy a test állandó gyorsulással mozogjon.) Az y tengely pozitív iránya felfelé mutat, a nehézségi gyorsulás lefelé, ezért $a_y = -g$.

Ferde hajítás

A sebesség komponenseit a megfelelő gyorsuláskomponensekből kapjuk:



$$v_x = v_{x0} = v_0 \cos\alpha = \text{const.}$$

$$v_y = v_{y0} - gt = v_0 \sin\alpha - gt$$

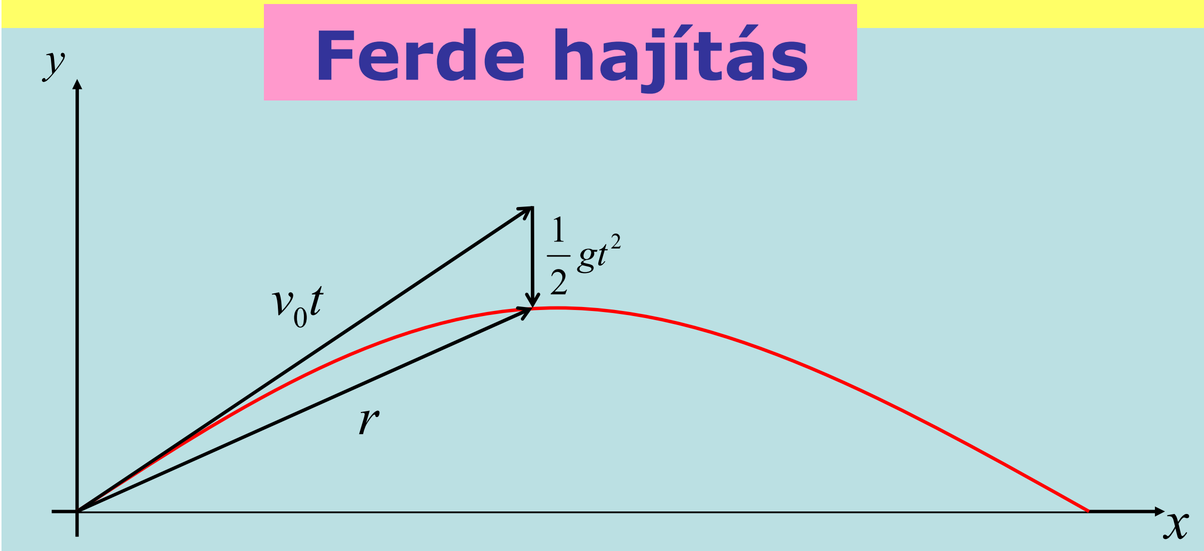
A helykoordináta komponenseit a megfelelő sebességkomponensekből kapjuk:

$$x = v_{x0}t = (v_0 \cos\alpha)t = v_0 t \cos\alpha$$

$$y = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

Mivel a vízszintes irányú gyorsuláskomponens 0, a sebesség vízszintes irányú komponense végig ugyanakkora marad.
A függőleges irányú komponense változik, mivel lefelé gyorsul a test.
A helykoordinátákat a sebességből és a gyorsulásból számolhatjuk.

Ferde hajítás



$$x = v_0 t \cos\alpha \qquad v_x = v_0 \cos\alpha; \qquad a_x = 0$$

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 \qquad v_y = v_0 \sin\alpha - gt \qquad a_y = -g$$

ha x_0 és $y_0 = 0$

Ha nem lenne lefelé irányuló gyorsulás, a test állandó sebességgel haladna és $v_0 t$ utat tenne meg.

A valós mozgás során a t idő alatt, ½ gt^2 utat tesz meg lefelé, (+ vízszintesen állandó sebességgel mozog).

Így jön létre az eredő mozgás, ami egy parabola.

Ferde hajítás

Látható, hogy a mozgás síkmozgás, amely az *xy* síkban megy végbe. Ebben az esetben az időparaméter kiküszöbölésével az egyik koordinátát kifejezhetjük a másik függvényében:

$$y = f(x)$$

Ezt nevezzük <u>pályaegyenlet</u>nek.

A ferde hajítás esetén az idő az $x = v_0 t \cos\alpha$ **-ból kifejezve:**

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

Ezt az $y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$ **-be helyettesítve:**

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}$$

A pálya egyenlete <u>parabola</u>.

$$y = \mathrm{a}x + \mathrm{b}x^2$$

Ferde hajítás

A fenti egyenletek alapján több kérdésre választ adhatunk:

- az emelkedés ideje, t_e, (ekkor y irányban egy pillanatra megáll a test):

$$v_y(t_e) = 0 \;\rightarrow\; v_y = v_0 \sin\alpha - g t_e \;\rightarrow\; v_0 \sin\alpha = g t_e \;\rightarrow\; t_e = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

- a hajítás ideje, t_h, (a test a kezdőponton átmenő vízszintes síkba visszatér):

$$y(t_h) = 0 \;\rightarrow\; v_0 t_h \sin\alpha = \frac{1}{2} g t_h^2 \;\rightarrow\; t_h = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} = 2 t_e$$

- a hajítás magassága (a y koordináta t_e-hez tartozó értéke):

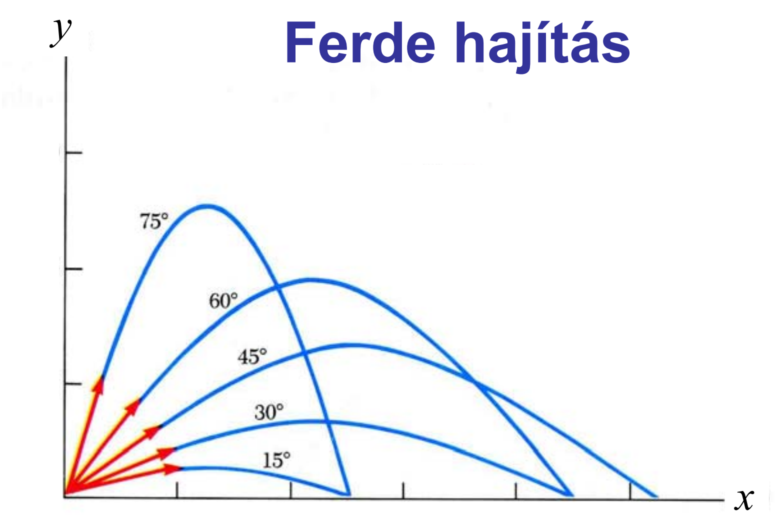
$$y(t_e) = y_{max.} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

-a hajítás távolsága (az x koordináta t_h-hoz tartozó értéke):

$$x(t_h) = x_{max.} = \frac{2 v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$$x = v_0 t \cos\alpha$$



A maximális távolságra kapott összefüggésből adódik, hogy akkor hajíthatunk a legtávolabbra, ha 45°–os szögben indítjuk a testet. Az ennél kisebb távolságba két különböző szög alatt is eljuttathatjuk a testet.

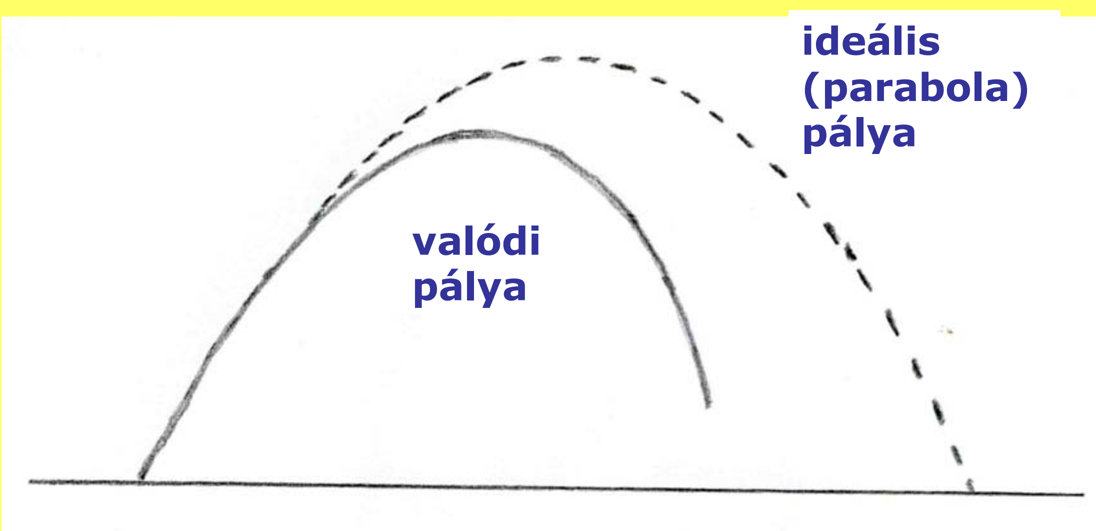
$$x_{\text{max.}} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

amely maximális értékét $\alpha = 45^{\circ}$ esetén veszi fel

A hajítás fenti törvényei magukban foglalják a speciális eseteket is, úgymint a függőlegesen felfelé- vagy lefelé hajítás, vízszintes hajítás, stb. eseteit. Ne felejtsük el, hogy a fenti egyenletek esetén a kezdőfeltételek: $x = y = 0$! Ha a konkrét feladatnál ez más érték, akkor azt figyelembe kell venni!

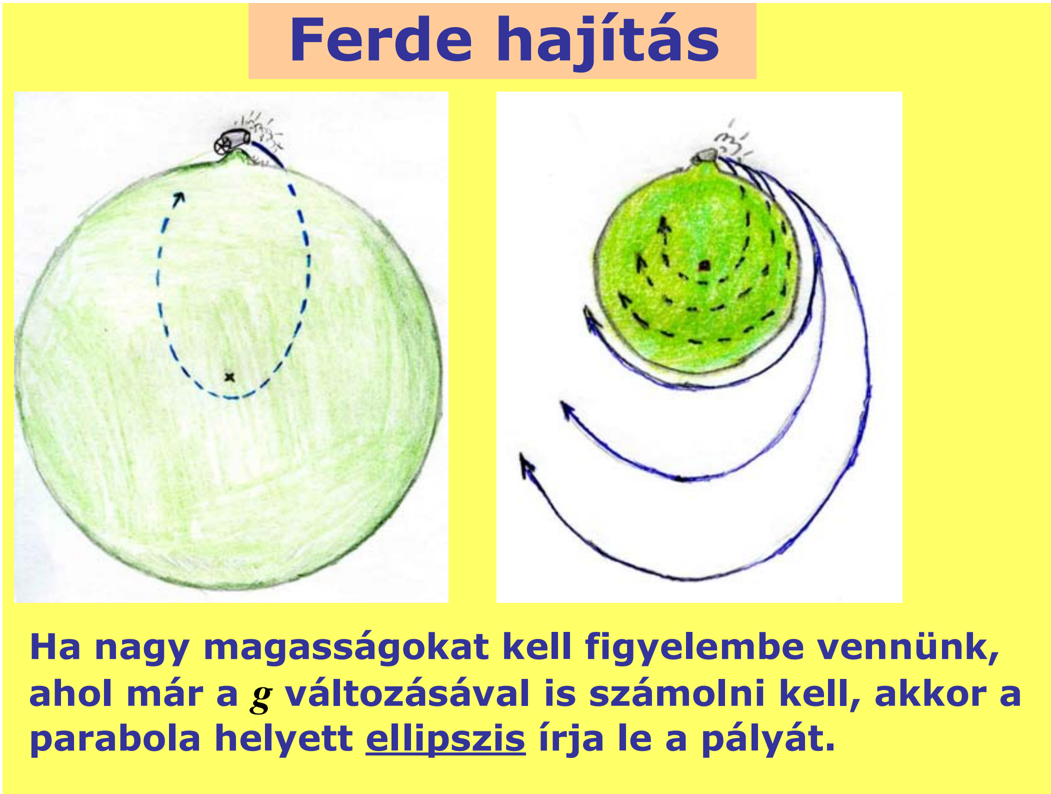
Közelítve a valós esetet, a levegő közegellenállását is figyelembe kell vennünk. Ekkor a ballisztikus görbéhez jutunk.

Ferde hajítás



Ha a levegő súrlódását is figyelembe vesszük, akkor a parabola pályától eltérő pályát, az ún. <u>ballisztikus görbét</u> kapjuk.

Az ábráról látható, hogy a mozgás egy ellipszis pálya darabjaként írható le, ha a *g* (a gravitációs törvényben megfogalmazott módon – lásd. később!) a magassággal változik.



A körmozgás

Körmozgásról akkor beszélünk, ha egy test körpályán mozog, azaz ha az anyagi pont által leírt pálya egy kör. Ezen belül megkülönböztetünk egyenletes körmozgást és változó körmozgást.

Egyenletes körmozgást végez az anyagi pont akkor, ha egy körpályán egyenlő időközök alatt, egyenlő utakat tesz meg, mindig ugyanabban a körülfutási irányban:

$s = vt$ ahol s : ívhosszúság, v : a sebesség nagysága

Ekkor a sebesség **nagysága állandó**, de az **iránya** pillanatról pillanatra **változik**.

A sebesség iránya a kör érintője irányába mutat (tangenciális) és ezért pontról pontra változik, tehát a mozgás, **gyorsuló mozgás.** A gyorsulás pedig a sebesség idő szerinti változása:

$$\vec{a}_{\text{átl}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Ha $\Delta t \to 0$, akkor $\Delta \vec{v}$ iránya tart a $\vec{v}$ -re merőleges irányhoz, így mivel a gyorsulás iránya mindig a sebesség **változásának** iránya, a gyorsulás is merőleges $\vec{v}$ -re. Ez azt jelenti, hogy a gyorsulás a kör sugarának vonalába esik, úgy hogy iránya minden pillanatban a kör középpontjába mutat. Ezért nevezzük radiális (sugárirányú,) vagy centripetális (középpont /centrum/ felé mutató) gyorsulásnak.

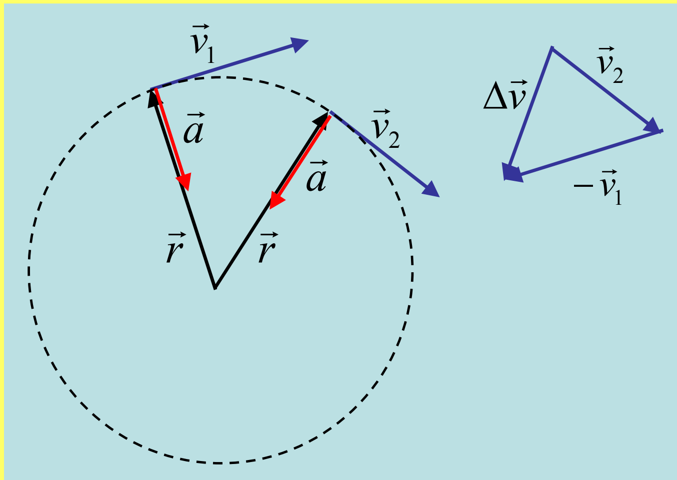
Körmozgás

Egyenletes körmozgásnál sebesség nagysága állandó, iránya a kör érintője, azaz mindig merőleges a sugárra.

A gyorsulás a sebesség<u>változás</u> irányába mutat, ez határesetben merőleges a sebességre, és a sugárral ellentétes irányba mutat.

$$\vec{a}_{\text{átl}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$



Körmozgás

A radiális (centripetális) gyorsulás

Az ábrán látható két háromszög hasonlóságát kihasználva:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r}$$

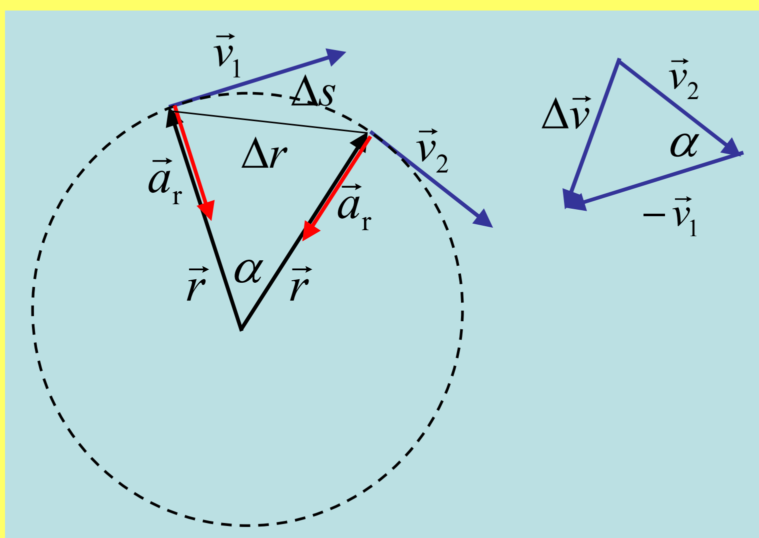
$$a_{\text{átl}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a_{\text{átl}}\Delta t = v\frac{\Delta r}{r}$$

$$a_{\text{átl}} = \frac{v}{r}\frac{\Delta r}{\Delta t}$$

határátmenetnél:

$$a_{\text{r}} = \frac{v^2}{r}$$



A gyorsulás nagysága: az ábráról látszik, hogy $\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta v}{v} \quad \mapsto \quad \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r}\frac{\Delta r}{\Delta t}$, ha $\Delta t \to 0$ akkor $\mapsto \frac{v^2}{r}$,

Tehát a gyorsulás minden pillanatban a középpont felé mutat, **centripetális v. radiális gyorsulás**, és nagysága: $a_{\text{r}} = v^2/r$.

Körmozgás — **A radiális (centripetális) gyorsulás**

Fontos meglátni, hogy ebben az esetben a sebesség <u>nagysága</u> nem változik.

Ami változik, az a sebesség iránya, ez okozza ezt a gyorsulást.

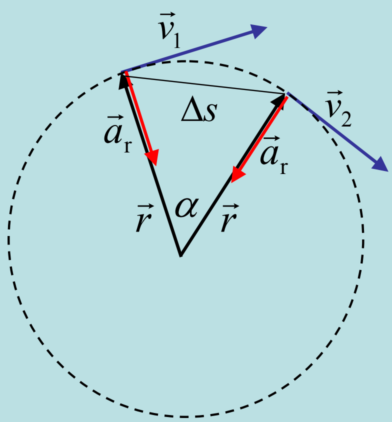
$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

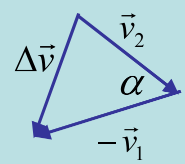
Iránya a kör középpontja felé mutat.

$$\vec{a}_r = -\frac{v^2}{r}\frac{\vec{r}}{r}$$

A gyorsulás érintőleges komponense 0.

$$a_t = 0$$





Látható, hogy az **egyenletes körmozgás**nál a sebességvektor **nagysága** állandó. Ezért az érintő irányú, vagy más néven tangenciális gyorsulás értéke 0.

Szögsebesség, szöggyorsulás

Körpályán mozgó pont helyzetét egyszerűen megadhatjuk az adott kiinduló helyzettől mért forgásszöggel. A forgásszögből a sebességgel és a pálya menti gyorsulással analóg mennyiségeket vezetünk le, a szögsebességet és a szöggyorsulást.

Körmozgás

Szögsebesség, szöggyorsulás

<u>Szögsebesség</u>: a szögelfordulás idő szerinti differenciálhányadosa:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \qquad \left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right]$$

A <u>szöggyorsulás</u> a szögsebesség idő szerinti differenciálhányadosa:

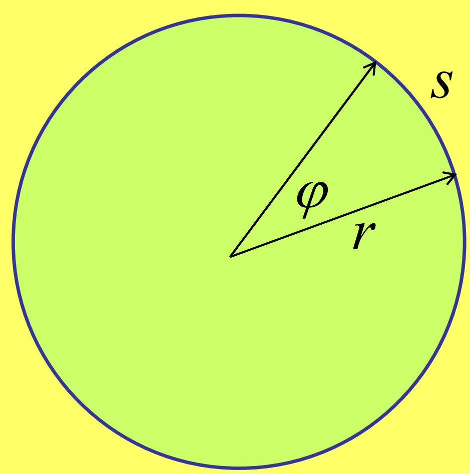
$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \qquad \left[\frac{1}{\mathrm{s}^2}\right]$$

A forgásszög ívmértéke és a kerületen megtett út közti összefüggés:

$$s = r\varphi \qquad \varphi = \frac{s}{r}; \quad \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}}\right]; \quad \mathrm{rad}$$

A kerületi sebesség és a kerületi (tangenciális) gyorsulás innen:

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt} = r\omega \text{ és } a_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\beta$$



Az szögsebesség (ω) mértékegysége: 1/s (s^{-1}). Mivel a szögelfordulás ($\Delta\varphi$) mértékegysége a **radián**, írhatnánk, hogy rad/s**.** De a radián: *ívhossz / sugár* *($\Delta s/r$)*, ennek dimenziója: hossz/hossz, azaz dimenziótlan mennyiség. Tehát, az ω fizikai mértékegysége: 1/s.

Körmozgás

A centripetális (radiális, normális) gyorsulás pedig:

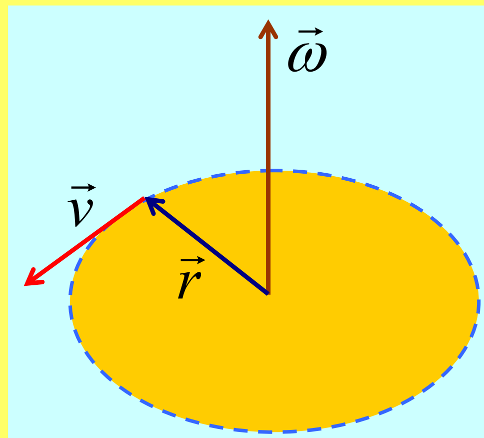
$$a_r = \omega v = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$$

Egyenletes körmozgásnál a szögsebesség állandó, a szöggyorsulás pedig zérus:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega(t - t_0)$$

A keringési idő vagy periódusidő (*T*) alatt az egy teljes kör megtételéhez szükséges időt értjük, míg a fordulatszám (*n*) az időegységenként megtett fordulatok számát jelenti, azaz *n = 1/T*. Mindebből:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$$



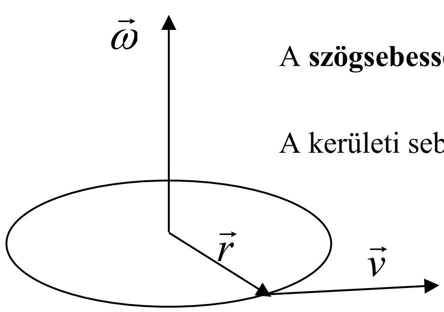
A kerületi sebesség (mint vektor), a szögsebesség és a helyvektor (sugár) vektoriális szorzata:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Lásd vektor szorzat!

A szögsebességet mint vektort úgy kapjuk meg, hogy a $\Delta\varphi$-hez irányt rendelünk (iránymennyiség). Ez az irány merőleges a kezdeti és a végső helyvektor által meghatározott síkra, és szembenézve vele az elfordulás + irányú (az óramutató járásával ellentétes, balra forgó).

Valójában a $\Delta\varphi$ véges szögelfordulás nem tekinthető vektornak, csak a határértéke, az elemi elfordulás: $d\varphi$.



A **szögsebesség vektor**: $\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$

A kerületi sebesség (mint vektor), a szögsebesség és a helyvektor vektoriális szorzataként adódik: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

($\vec{\omega}, \vec{r}, \vec{v}$ ebben a sorrendben, jobbsodrású rendszer)

Körmozgás

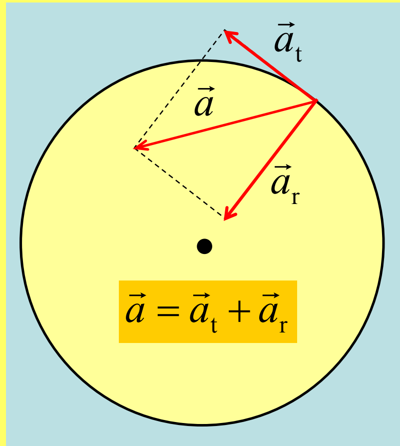
A szöggyorsulás vektor:

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

A tangenciális és radiális irányú gyorsulásvektorok:

$$\vec{a}_{\mathrm{t}} = \vec{\beta} \times \vec{r}$$

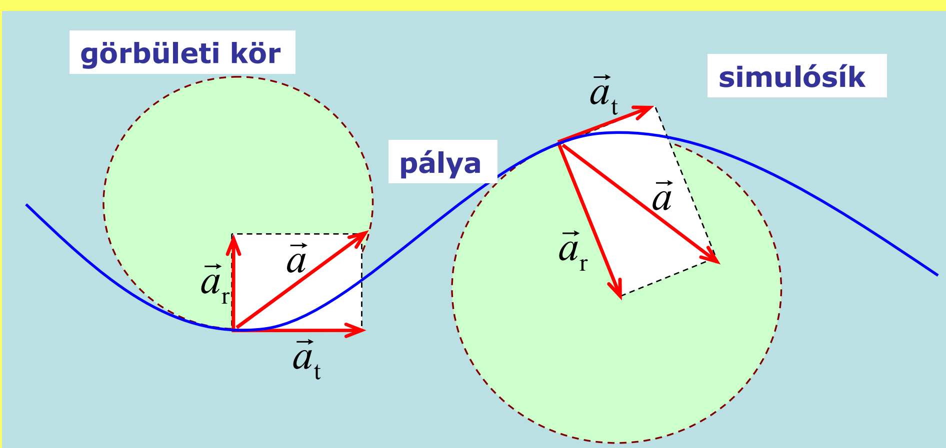
$$\vec{a}_{\mathrm{r}} = \vec{\omega} \times \vec{v} = -\omega^2 \vec{r}$$



Ha szögsebesség nem állandó, akkor beszélünk szöggyorsulásról (β). Ekkor nyilván a kerületi (tangenciális) sebesség sem állandó és a tangenciális gyorsulás (a_{t}) sem nulla. Az ábráról láthatóan, a kerületi gyorsulás és a centripetális (radiális) gyorsulás (a_{r}) vektori eredője adja az eredő gyorsulást.

Állandó síkú körmozgásnál iránya $\vec{\omega}$ -val egyező, ha ω nő, ellentétes vele ha ω csökken. Ha a mozgás síkja változik, $\vec{\beta}$ nem 0, állandó nagyságú $\vec{\omega}$ mellett sem. A gyorsulás pályamenti, és arra merőleges komponenséhez hasonlóan, itt is beszélhetünk tengellyel párhuzamos és arra merőleges szöggyorsulás komponensről.

Tangenciális és radiális gyorsulás

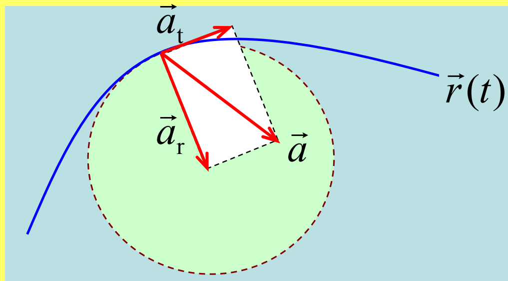


Görbe vonalú mozgás esetén a gyorsulást felbonthatjuk két egymásra merőleges komponensre, a <u>tangenciális</u> (pályamenti) gyorsulásra és középpont felé mutató <u>radiális</u> (centripetális) gyorsulásra.

Tetszőleges görbe vonalú mozgásoknál definiálhatunk egy ún. simulósíkot, azt a síkot, amelybe (pongyolán fogalmazva) legjobban belesimul az adott pályaszakasz, és egy görbületi kört, amely a legjobban illeszkedik az adott göbéhez (pontatlanul).

a tangenciális (pályamenti) gyorsulás:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$



a radiális (centripetális) gyorsulás:

$$a_r = \frac{v^2}{R}$$

A gyorsulás nagysága: $a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}$

Látható, hogy a tömegpont gyorsulását egyfelől a sebesség nagyságának megváltozása, másfelől a pálya görbültsége eredményezheti.
Egyenes vonalú mozgásoknál:
$R = \infty \to v^2 / R = 0$
azaz a gyorsulásnak csak tangenciális komponense van. Egyenletes körmozgásnál (v = áll.) pedig csak radiális komponense.

A harmonikus rezgőmozgás kinematikája

Harmonikus rezgőmozgásnak nevezzük az olyan mozgásokat, ahol a kitérés az időnek

$x = A \sin(\omega t + \varphi_0) = A \sin(2\pi t/T + \varphi_0) = A \sin(2\pi f t + \varphi_0)$

alakú függvénye, ahol A, ω, és φ_0 állandók, $f = 1/T$ pedig a frekvencia.

A sebesség: $v = dx/dt = A\ \omega \cos(\omega t + \varphi_0)$

a gyorsulás: $a = d^2x/dt^2 = -A\ \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x$

A harmonikus rezgőmozgás kinematikája

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0) = A\sin(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0) = A\sin(2\pi f t + \varphi_0)$$

A - **amplitúdó [m]**

ω - **körfrekvencia [1/s]**

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

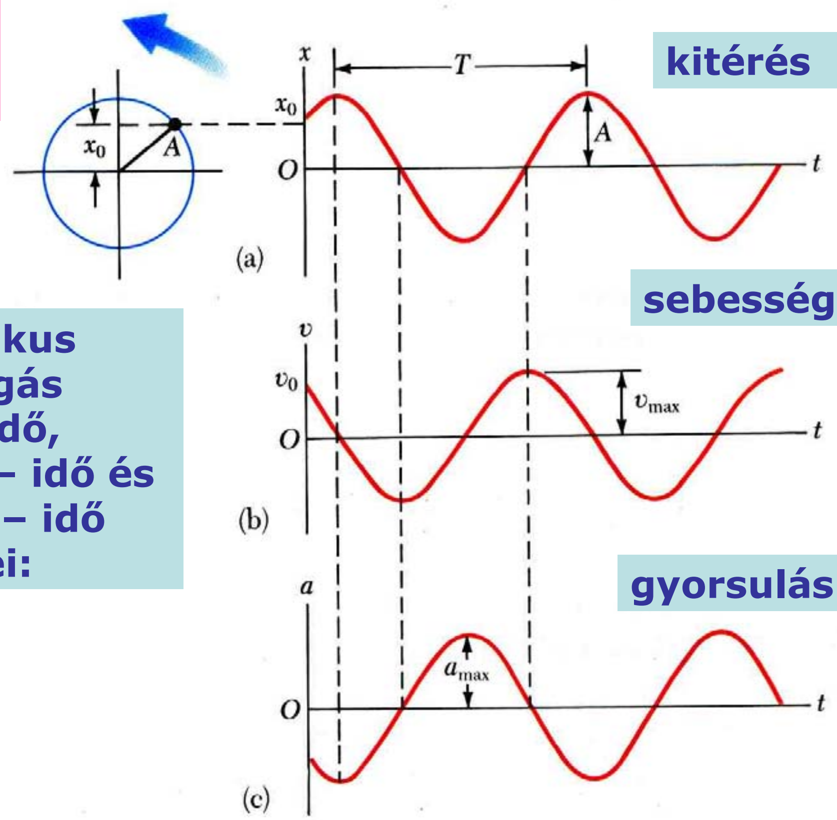
T - **periódusidő [s]**

$f = \frac{1}{T}$ - **frekvencia [1/s, Hz]**

φ_0 - **kezdőfázis**

Így mozog pl. egy csavarrugóra akasztott és kitérítés után elengedett test. Tehát a kitérés az idő szinuszos függvénye.
Az amplitúdó (A) a maximális kitérést jelenti, a periódusidő (T) az egy oda-vissza rezgéshez szükséges időt, a frekvencia (f)az időegység (többnyire egy másodperc) alatti rezgések számát, a kezdőfázis pedig azt, hogy a mérés kezdetekor hol volt a test. Ez választható 0-nak is. A frekvencia 1/s egységét hertz-nek nevezzük, jele: Hz.

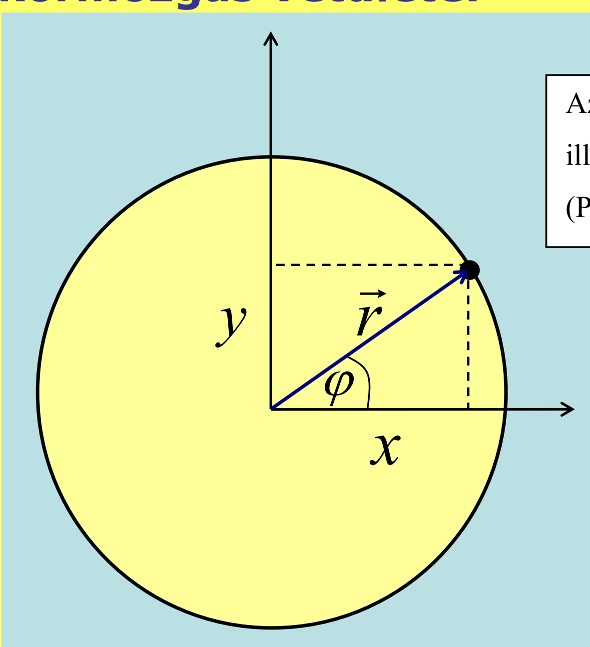
A harmonikus rezgőmozgás kinematikája



A harmonikus rezgőmozgás kitérés – idő, sebesség – idő és gyorsulás – idő függvényei:

A harmonikus rezgőmozgás kinematikája

A harmonikus rezgőmozgás mint az egyenletes körmozgás vetülete:



Az egyenletes körmozgást végző pont vetülete az x ill. az y tengelyre harmonikus rezgőmozgást végez. (Pl. egy keringő golyó árnyéka a falon.)

$$x = r\cos\varphi = r\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$y = r\sin\varphi = r\sin(\omega t + \varphi_0)$$

φ_0 az ún. kezdőfázis, azaz a mérésünk kezdetéhez (t_0) tartozó szögelfordulás.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega r; \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$$

A harmonikus rezgőmozgást részletesebben majd a dinamikában tárgyaljuk.

Az anyagi pont dinamikája

„Kezdetben volt Arisztotelész,
És a nyugvó dolgok nyugalomban maradtak,
És a mozgó dolgok előbb-utóbb megálltak,
És végül minden dolog állt, és a hatalmas
Isten körülnézett, és látta, hogy unalmas.”
(Tim Joseph (Unified Field Theory)

A kinematikában megismerkedtünk azokkal a mennyiségekkel, amelyekkel le tudjuk írni hogyan mozognak a testek (anyagi pontok). A dinamika azzal foglalkozik, hogy megállapítsa miért mozognak a testek adott módon, azaz a testek tulajdonságaiból, kölcsönös helyzetéből meghatározza a mozgás mikéntjét. Ehhez új mennyiségek bevezetése szükséges. Alapvető fontosságúak lesznek ezek közül (a fizika más ágaiban is) az ún. **megmaradó mennyiségek**, amelyek értéke egy zárt anyagi rendszerre állandó (pl. tömeg, impulzus, impulzusmomentum, energia).

A tehetetlenség törvénye (Newton I. törvénye)

Az ókor nagy görög gondolkodója *Arisztotelész* (i.e. 384 - 322) - akinek munkássága meghatározta az egész középkor szellemiségét - azt mondta, hogy a testek természetes állapota a nyugalom. Azaz a testek maguktól nem mozognak.

Galilei (1564 - 1652), aki kísérleteivel megalapozta Newton munkásságát, ezt úgy módosította, hogy a testek maguktól **nem indulnak el**. Ha egy vízszintes síkon tanulmányozzuk egy mozgó test sebességét, azt tapasztaljuk, hogy minél jobban csökkentjük a súrlódást, annál kevésbé csökken a sebessége. Ezt extrapolálva arra az ideális esetre, amikor a súrlódást zérusnak feltételezzük, arra jutunk, hogy ebben az esetben a sebessége nem változik. A sebesség megváltozását, tehát egy másik test (pl. a felület, amin csúszik) okozza. Tehát kimondhatjuk, hogy a **testek sebessége** (iránya és nagysága) **csak más testek hatására változik meg.**

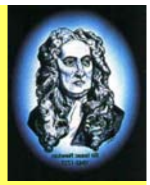
Ideális határeset: elvonatkoztatás, mely alapját képezi bonyolultabb esetek vizsgálatának. Az ideális határesetre vonatkozó törvényeket, a rájuk épülő további következtetések helyessége (tapasztalattal való egyezése) igazolja.

Galilei felismerése, a **tehetetlenség törvénye**, fizikai axióma, azaz olyan alaptörvény, amit közvetlenül nem tudunk teljes pontossággal igazolni, de a ráépülő következtetéseket már igen.

A törvényt *Newton* (1642 - 1727) fogalmazta meg a mai alakjában (Newton I., röv.: **N.I.**):

Minden test megtartja mozgásállapotát (sebességének nagyságát és irányát), amíg más testek (a környezete) ennek megváltoztatására nem készteti. Azaz ha egy test sebessége megváltozott, keresni kell a testet, vagy testeket, amelyek ezért "felelőssé tehetők".

Newton I. axiómája

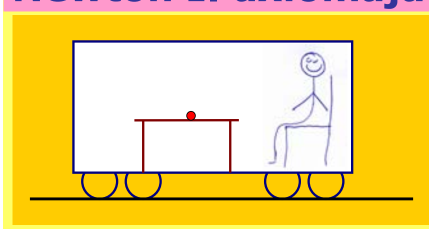


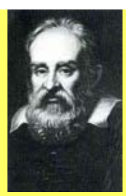
Minden test megtartja mozgásállapotát (sebességének nagyságát és irányát), amíg más testek (a környezete) ennek megváltoztatására nem készteti.

(A tehetetlenség törvénye)

Inerciarendszerben igaz!

Newton I. axiómája





Bizonyos vonatkoztatási rendszerekben a tehetetlenség törvénye nem érvényes.

Newton I. axiómája burkoltan magában foglalja azt az állítást, hogy léteznek olyan vonatkoztatási rendszerek, amelyekben a tehetetlenség törvénye teljesül. Ezeket inerciarendszereknek nevezzük.

Inerciarendszer: idealizáció, ellenőrzés tapasztalatokkal

De vajon mindig igaz-e a fenti kijelentés? Vegyünk egy példát! Egy vonaton ülve a sík, sima asztalon figyelünk egy biliárdgolyót. Egyszer csak azt tapasztaljuk, hogy a golyó a menetirányban elmozdul, holott a leggondosabb vizsgálat sem derít fel olyan testet, amely ezért a mozgásállapotváltozásért okolható lenne. Tudjuk, a vonat fékezett, gyorsuló (negatív) mozgást végzett velünk együtt, míg a golyó folytatta egyenes vonalú, egyenletes mozgását.

De az adott rendszerben (vonatfülke) levő megfigyelő akkor is a N.I.-től eltérő tapasztaltra tesz szert. Mi a korrekt megoldás? Meg kell adnunk a törvény keretét, azaz azt, hogy milyen feltételek esetén teljesül, nevezetesen azt, hogy mely vonatkoztatási rendszerben érvényes. Megállapítható, hogy ha egy vonatkoztatási rendszerben teljesül, akkor egy ehhez képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző rendszerben szintén teljesül, de egy gyorsuló (vagy forgó) rendszerben nem. (Lásd. az „Egymáshoz képest mozgó vonatkoztatási rendszerek” fejezetet!)

Tehát a N.I. kimondásakor hozzá kell tennünk, hogy hol (milyen körülmények között) érvényes, azaz azt, hogy a **N.I.** csak **inerciarendszerben érvényes.** E mellé definiálnunk kell, hogy mi az az inerciarendszer. Az olyan vonatkoztatási rendszert, amelyben a N.I. teljesül, **inerciarendszer**nek (tehetetlenségi rsz.) nevezzük.

Ha egymás mellé tesszük a fenti két állítást, akkor ezt kapjuk: a N.I. olyan rendszerben érvényes, amelyben érvényes N.I. Ezt logikailag tautológiának (önazonosság, önhivatkozás) nevezzük. A N.I. önmagában még azt sem mondja ki, hogy ilyen rendszer létezik. Ezért a klasszikus mechanikában (az axiomatikus felépítés miatt) **posztuláljuk**, hogy inerciarendszer létezik. Ez tkp. egy kiválasztási szabály, amely megadja, hogy a dinamika törvényeit inerciarendszerhez viszonyítva fogalmazzuk meg. A kiválasztási szabály megjelöli azokat a rendszereket, amelyekben a többi törvény érvényesül. És igazából itt az sem baj, hogy inerciarendszer a gyakorlatban teljes pontossággal nem mutatható. A Föld forog a tengelye körül és kering a Nap körül. A Naprendszer kering a Tejút rendszer tömegközéppontja körül. A Tejútrendszer betagozódik a lokális galaxishalmazba, és a galaxisok is változó sebességgel távolodnak egymáshoz képest. Az inerciarendszer egy absztrakció, idealizáció amelynek segítségével törvényeink egyszerűen, szemléletesen megfogalmazhatók. A belőle fakadó következményeket pedig tapasztalati úton tudjuk ellenőrizni.

Newton II. axiómája

Egy test gyorsulása egyenesen arányos a rá ható erővel és fordítottan a test tömegével:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Az axiómák közül, talán a legfontosabb a második. Az alábbiakban részletesen elemezzük, hogy az összefüggésben szereplő mennyiségek mit is jelentenek pontosan.

Vagy: $$\vec{F} = m\vec{a}$$

(A dinamika alaptörvénye)

Newton II. axiómája

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

m: **A tömeg a testek tehetetlenségének mértéke.**

A tömegetalon:

A tömeg egysége a párizsi Tömeg és Mértékügyi Hivatalban őrzött platina-iridium ötvözetből készült hengeres test tömege, a kilogramm [kg].

Az atomok és molekulák világában egy másik tömegegység is használatos. Az atomi tömegegység a szénatom tömegének 1/12 része, azaz 1 ATE = 1,6605 10^{-27} kg.

Tömeg: a tömeg egyik köznapi jelentése az, hogy nagyság, mennyiség, sokaság (anyagmennyiség, pl. a kémiában). Itt más érelemben fogjuk használni ezt a köznapi fogalmat.

A fizikában - akárcsak más tudományokban is - sok olyan szót, fogalmat használunk, amelyek a köznyelvben is előfordulnak, de sokszor más jelentéssel, vagy kevésbé pontos jelentéssel. Ezért mindig meg kell adni, hogy az adott kifejezésen pontosan mit értünk.

Induljunk ki két test kölcsönhatásából! Pl. vegyünk két légpárnás sínen mozgó kiskocsit. Ha az egyiket nekilököm a másiknak, akkor az ütközés során mindkét kocsi mozgásállapota megváltozik. Vagy ha két „korcsolyás ember” kötéllel húzza egymást (egyik a másikat) akkor mindkettő mozgásállapota megváltozik. **Két test kölcsönhatása során, mindkét test mozgásállapota megváltozik.** A korcsolyások példájánál maradva, azt tapasztaljuk, hogy a „kövérebb” mozgásállapota kevésbé változik meg. A sebességváltozás iránya ellentétes, míg a nagyságuk hányadosa egy adott testpárra jellemző állandó. Azt mondjuk, hogy „*B*” test tömege (m_B) n szerese „*A*” test tömegének, ha a kölcsönhatásuk során, „*B*” test sebességváltozása n-ed része „*A*” test sebességváltozásának. Azaz,

$\Delta v_B/\Delta v_A = 1/n \quad \rightarrow \quad m_B/m_A = n$ vagy: $m_B = n m_A$; $\Delta v_B = n^{-1}\Delta v_A$

A fenti példát általánosítva, minden testhez egy *m* tömeget rendelhetünk, melyen az

$m = \Delta v_0/\Delta v \cdot 1$ kg mennyiséget értjük, ahol az 1 kg az ún. **tömegetalon**.

Δv és Δv_0 a mérendő test és a tömegetalon párkölcsönhatásánál fellépő sebességváltozások.

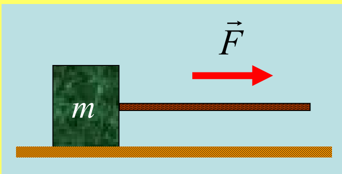
Ezek a sebességváltozások azonos idő alatt történtek, azaz a gyorsulások is úgy aránylanak egymáshoz, mint a sebességváltozások: $\Delta v_0/\Delta v = \Delta a_0/\Delta a$.

A tömeg nem vezethető vissza (a klasszikus fizikában) a hosszúság és az idő alapmennyiségekre. **Az így bevezetett tömeg, a testek azon tulajdonságát jellemzi, hogy a sebességüket megváltoztatni igyekvő hatásoknak** (különböző mértékben) **ellenállnak.** A tömeg a testek **tehetetlenségének mértéke**.

Newton II. axiómája

$\vec{F} = m\vec{a}$

Egy ismeretlen test m tömegének meghatározása: alkalmazzunk azonos erőt az m_0 és m tömegekre és mérjük meg, hogy azok mekkora a_0 illetve a gyorsulásra tesznek szert.



$F = m_0\, a_0$ **és** $F = m\, a$

Az erők egyenlősége miatt:

$$m_0\, a_0 = m\, a \quad \textbf{azaz} \quad m = m_0 \frac{a_0}{a}$$

- **tehetetlen tömeg (m_t): a testek dinamikai tulajdonságát jellemzi**

- **súlyos tömeg (m_s): a gravitációs erőtér forrásaként szereplő „gravitációs töltés”**

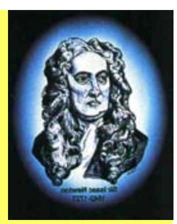
(Relativitáselmélet: a tömeg függ a sebességtől)

A N.II. alapján egy test (tehetetlen) tömegét egy ismert erő rajta okozott gyorsulásának mérésével határozhatjuk meg. Ezt nevezzük **dinamikai tömegmérés**nek.

(A relativitáselmélet tárgyalásakor látni fogjuk, hogy a tömeg nem állandó különböző sebességeknél, hanem a sebességgel nőni látszik. De ez a (relativisztikus) hatás, csak nagyon nagy, a fénysebességet megközelítő, sebességeknél jelentős. Kisebb sebességeknél, jó közelítéssel állandónak tekinthető.)

Itt szólni kell a kétfajta tömegről. A most bevezetett tömeg az ún. „**tehetetlen tömeg**” (m_t), amely a testek dinamikai tulajdonságát jellemzi. A gravitációs kölcsönhatás tárgyalásakor, látni fogjuk, hogy a gravitációs erőtér forrásaként szereplő „gravitációs töltés” jellegű mennyiséget is tömegnek nevezzük, ez ún. „**súlyos tömeg**” (m_s).

Newton II. axiómája $\vec{F} = m\vec{a}$



Az erő származtatott mennyiség, mértékegysége a [kgms⁻² = N (newton)]. A tömegpontra ható erő, a tömegpont és a vele kölcsönhatásban levő test relatív helyzetének, sebességének, deformációjának, belső állapotának, stb. egyértelmű függvénye. Ezt a függvényt erőtörvénynek nevezzük.

Néhány erőtörvény:

- rugalmas erő:

$$\vec{F} = -D\vec{r}$$

- nehézségi erő:

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

- ált. tömegvonzás:

$$\vec{F}_{1,2} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

- elektrosztatikus erő:

$$\vec{F}_{1,2} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

- Lorentz erő:

$$\vec{F} = Q\, \vec{v} \times \vec{B}$$

Emlékeztető:

a négy alapvető kölcsönhatás (erő)

Erő

A testek kölcsönhatásában megnyilvánuló fizikai mennyiség. Az erő a gyorsulás „oka”.

Erőtörvények: kijelentjük, hogy erőtörvények léteznek, és a körülmények egyértelmű függvényei.

Itt a "kijelentés" hangsúlyozása ismét a klasszikus mechanika axiomatikus felépítését emeli ki. Ez tükrözi azt a szándékot, hogy megalkotói, a mintának tekintett eukleidészi geometriához hasonló formát akartak adni neki.

Newton II. axiómája

Az impulzus (lendület, mozgásmennyiség):

$$\vec{I} = m\vec{v} \qquad \left[\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$

Az erő az impulzusváltozás gyorsasága:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{I}}{dt}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$ **(ha *m* állandó)**

Két tömegpontnál: $\Delta\vec{I}_1 = -\Delta\vec{I}_2$

Vagy: $\vec{I}_1 + \vec{I}_2 = \vec{I}_1' + \vec{I}_2'$

Impulzus (lendület)

Az tömeg és a sebesség szorzataként definiált mennyiséget impulzusnak (lendületnek) nevezzük. Két tömegpont kölcsönhatásánál, mindkét tömegpont impulzusa megváltozik, és az impulzusok változása egyenlő nagyságú és ellentétes irányú:

$$\Delta\vec{I}_1 = -\Delta\vec{I}_2$$

Másként, két tömegpont összimpulzusa a kölcsönhatás során állandó marad: ez az **impulzus-megmaradás** törvénye.

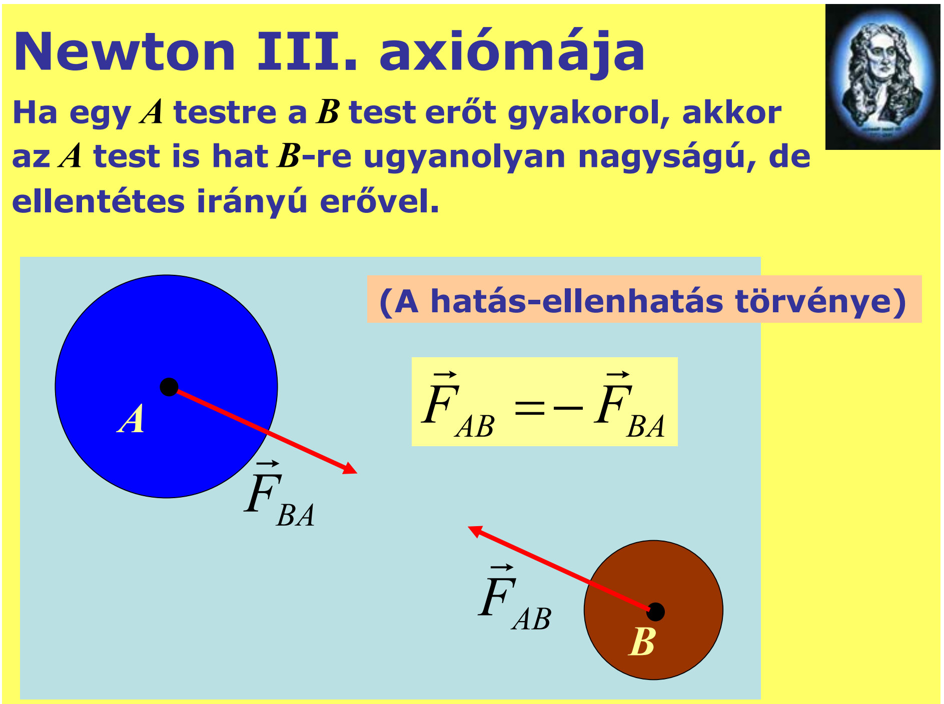
$$\vec{I}_1 + \vec{I}_2 = \vec{I}_1' + \vec{I}_2'$$

(A baloldalon a kölcsönhatás előtti, a jobboldalon a kölcsönhatás utáni impulzusok állnak. Később részletesen kitérünk rá.)

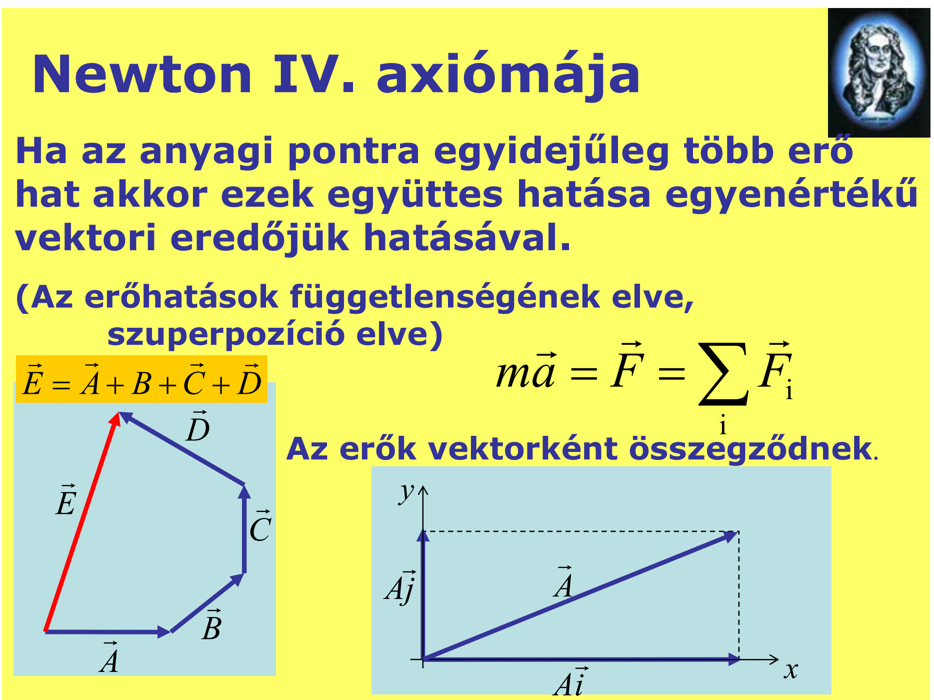
Az impulzusváltozás az előző esetben egyenlő nagyságú és ellentétes irányú volt, és ez független attól, hogy milyen típusú kölcsönhatás van a testek között. Az, hogy milyen **nagyságú** és **irányú** ez az impulzusváltozás, már nem független ettől. A kölcsönhatás pillanatnyi erősségének mennyiségi jellemzőjéül az **impulzusváltozás** gyorsaságát választjuk, és ezt **erő**nek nevezzük. Ez az erő egy másik definíciója. (Eredetileg Newton így fogalmazta meg az erőt.)

Newton III. axiómája (N.III.)

Ha egy tömegpont erőt gyakorol egy másik tömegpontra, akkor a másik is erőt gyakorol az egyikre. (Az erők mindig párosával lépnek fel.) A két erő egyenlő nagyságú és ellentétes irányú. Ez más néven a hatás - ellenhatás (akció - reakció) törvénye.



Ez tkp. az impulzusmegmaradásból is származtatható. A kölcsönhatás ideje mindkét testre (tömegpontra) ua., tehát a $\Delta\vec{I}_1 = -\Delta\vec{I}_2$ egyenlet mindkét oldalát elosztva a kölcsönhatás idejével, a megfelelő erőket kapjuk. Fontos megjegyezni, hogy itt az erőpárban fellépő két erő, **különböző** testekre hat. Ha ugyanarra a testre hatna, akkor kompenzálnák egymást, nem lenne mozgás.



Ha egy testre egyidejűleg több erő hat (több testtel van kölcsönhatásban), a tömegpont úgy mozog, mintha egyedül a rá ható erők vektori eredője hatna rá.
Más szóval, az erők vektoriálisan összegződnek. Ez a **szuperpozíció elve**, amit szoktak **Newton IV. axiómájá**nak (**N.IV.**) is nevezni. Emlegetik még, mint az „erők függetlenségének az elvét", azaz, a tömegpontra egyidejűleg ható erők, egymást nem befolyásolják, hatásaik zavartalanul egymásra rakódnak (szuperponálódnak). A szuperpozíció elve nemcsak az erők helyes összegzését határozza meg, de fordított irányban alkalmazva azt is lehetővé teszi, hogy a testre ható erőket különböző irányú komponensekre bonthassuk.
Speciális eset, ha a tömegpontra ható erők eredője 0. Ekkor a tömegpont inercia (tehetetlenségi) mozgást végez, azaz állandó sebességgel halad. (Ha ez az állandó sebesség 0, akkor áll.)

Sztatika Ha a test nyugalomban van, vagy egyensúlyban van, $\sum \vec{F}_i = 0$, akkor beszélünk sztatikáról. A sztatikai erőmérés alapja egy rugalmas test deformációja során keletkező feszültség és az $m\vec{g}$ súlyerő egyensúlya, azaz a N.III.-ra alapul. A tapasztalat szerint, az egyenlő tömegű testek súlya egyenlő. Ez másképpen azt jelenti, hogy a gravitációs gyorsulás minden testre azonos, és független az anyagi minőségtől. A súlyos tömeg (m_s) nagy pontossággal arányos a tehetetlen tömeggel (m_t). Ezt nagy pontossággal mérte meg *Eötvös Lóránd*, akinek mérési módszere legendás volt a korában.

A mechanika alapjai a Newton axiómák. Az axiómák közvetlenül nem bizonyítható tételek, noha nyilvánvalóan a bennük megfogalmazott állítások eredendően a tapasztalatban gyökereznek.
Igazságukat a belőlük levonható következtetések tapasztalattal való egyezése dönti el. A tapasztalat pedig azt mutatja, hogy a Newton-féle dinamika alapján precízen leírható a mechanikai jelenségek rendkívül széles köre.
De mint minden fizikai elméletnek, a newtoni dinamikának is megvannak a maga korlátai: nagyon gyors, a fénysebességet megközelítő mozgások esetén, valamint a mikrorészecskék világában a klasszikus elmélet kiegészítésre szorul. Érvényességi körét kiterjesztve átveszi helyét a speciális relativitáselmélet és a kvantummechanika.
A dinamika alapegyenlete a IV. axiómával kiegészített II. axióma:

A dinamika alapegyenletének általános alakja

A II. és IV. axióma alapján a dinamika alapegyenletének általános alakja:

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_\mathrm{i} = \vec{F}_\mathrm{e}\left(\vec{r}, \vec{v}, t\right)$$

Az erő általában a tömegpont helyvektorának, sebességének és az időnek függvénye.

Kétféle problémakör:

- mozgásból erőtörvény (indukció) /pl. bolygómozgásból grav. törv./

- erőtörvényből mozgás (dedukció) /pl. $\vec{F} = -D\vec{r}$–ből harm. rezgés/

kezdeti feltételek + a diff. egyenlet megoldása,

mechanikában az okság elve

A mechanikában kétféle feladatkört fogalmazhatunk meg:

1, a tömegpont mozgásának megfigyelése útján (a helyvektor időfüggésének megállapításával) következtetünk a gyorsulásra, azaz a tömeg ismeretében az erőre: **erőtörvények felállítása** (indukció).

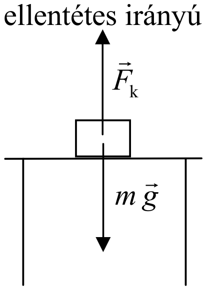
2, a másik feladatkörben az alapegyenlet alkalmazása fordított irányú. Az erőtörvények ismeretében (ha az 1.-es pontban leírt módon már megtaláltuk) a gyorsulás, majd a helyváltoztatás meghatározása (dedukció).

Ez a mechanikában megfelel az **okság elvé**nek. A kezdeti feltételek, és a testre ható ismert erők, a test későbbi helyzetét egyértelműen meghatározzák. Az anyagi pont nem rendszertelenül mozog, hanem a környező világ által meghatározott módon.

Kényszermozgások

Kényszermozgás során a testnek, egy merevnek tekinthető felületen vagy görbén kell maradnia, vagy mozgását más geometriai feltételek korlátozzák. Az erőt mely a kényszert biztosítja (pl. adott felületen tartja a testet) **kényszererő**nek, a geometriai feltételt, pedig **kényszer**nek vagy kényszerfeltételnek nevezzük. Ha egy erőről hangsúlyozni akarjuk, hogy nem kényszererő, **szabaderő**nek nevezzük.

Pl. egy asztalra helyezett test nyugalomban van, mivel a rá ható $m\vec{g}$ súlyerőt kompenzálja a vele ellentétes irányú kényszererő, amit asztal lapja fejt ki a testre ($\vec{F}_\mathrm{k}$).



$$\sum \vec{F}_\mathrm{i} = m\vec{g} + \vec{F}_\mathrm{k} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{F}_\mathrm{k} = -m\vec{g}$$

Néha megkülönböztetik a súlyerőt és gravitációs erőt. A gravitációs erő a test tömegközéppontjában hat, a súlyerő az alátámasztási felületen, a gravitációs erő hatásvonalában lefelé (ez nyomja a felületet). Ha nincs alátámasztás (felfüggesztés) a test szabadon esik. Ekkor beszélünk „súlytalanságról". De a gravitációs erő ekkor is hat. Lásd a mesterséges hold esetét, lejjebb!

Lejtő:

A kényszermozgások bemutatására példaként tekintsük egy test lejtőn történő súrlódásmentes mozgását! Ekkor a testre két erő hat, az $m\vec{g}$ súlyerő és a lejtő által kifejtett, a lejtőre merőleges irányú $\vec{F}_\mathrm{k}$ kényszererő. Bontsuk fel a súlyerőt a lejtővel párhuzamos és rá merőleges komponensekre:

$$F_{=} = mg\sin\alpha$$

$$F_{\perp} = mg\cos\alpha$$

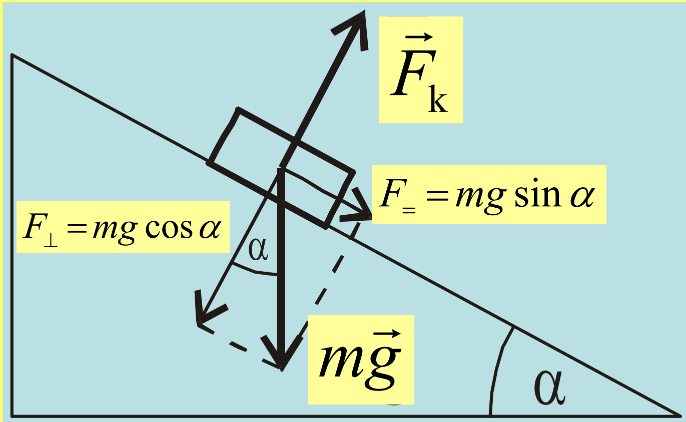
A kényszererő megakadályozza a kényszerfelületre merőleges mozgást. A test a lejtőre merőlegesen nem gyorsul, s így a dinamika alapegyenletét a lejtőre merőleges irányú komponensekre felírva kapjuk:

$$F_\mathrm{k} - mg\cos\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad F_\mathrm{k} = mg\cos\alpha$$

A lejtővel párhuzamos irányban: $ma = mg\sin\alpha$

Így a lejtőn súrlódás nélkül lecsúszó test gyorsulása: $a = g\sin\alpha$

Lejtő:



Lejtőre merőleges komponens:

$$F_k - mg\cos\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad F_k = mg\cos\alpha$$

Lejtővel párhuzamos komp.: $ma = mg\sin\alpha$

a gyorsulás: $a = g\sin\alpha$

Görbe vonalú mozgások:

A kinematikában láttuk, hogy a görbe vonalú mozgások esetén a gyorsulás érintőleges (tangenciális) és sugárirányú (más neveken: radiális, normális, centripetális) komponensekre bontható fel. A dinamika alaptörvényének ($\vec{F} = m\vec{a}$) felhasználásával könnyen felírhatjuk az egyes gyorsuláskomponensek létrehozásához szükséges erőket:

A tangenciális komponens: $F_t = ma_t = m\dfrac{dv}{dt}$ a radiális komponens: $F_r = ma_r = m\dfrac{v^2}{r}$

Tehát az elsőnél a sebesség **nagyságának** változása adja a gyorsulást, míg a másodiknál a sebességvektor **irányának** változása okozza azt.

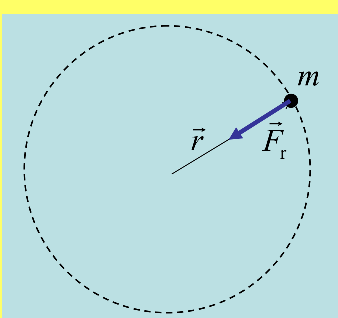
Kényszermozgások

Egyenletes körmozgás dinamikája:

A kinemetikából: $a_r = \dfrac{v^2}{r}$ **Innen az erő:** $F_r = m\dfrac{v^2}{r}$

centripetális erő

vektorosan: $\vec{F}_r = -m\dfrac{v^2}{r}\dfrac{\vec{r}}{r} = -m\omega^2\vec{r}$



A radiális erőt kifejtheti pl. egy kötél (kötélre kötött testet pörgetünk), vagy egy görbült pálya kényszerereje, vagy a gravitációs erő, stb. Egyenletes körmozgás esetén az érintőleges komponens 0, azaz csak a centripetális komponens marad meg:

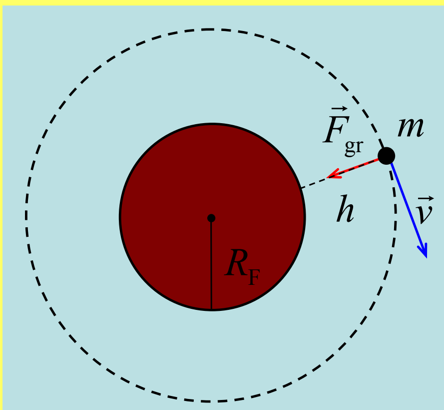
$$F_r = m\frac{v^2}{r}$$

Példaként tekintsük egy h magasságban a Föld körül körpályán keringő m tömegű mesterséges hold esetét! A dinamika alapegyenletének alkalmazásával határozzuk meg a keringés sebességét! A mesterséges holdra egyetlen erő hat, a Föld által kifejtett F_{gr} gravitációs vonzóerő:

Egyenletes körmozgás dinamikája:

Föld körül körpályán keringő testnél:

$$F_{gr} = \gamma \frac{m\, m_F}{r^2} = \gamma \frac{m\, m_F}{(R_F + h)^2}$$



ez okozza a centripetális gyorsulást :

$$\gamma \frac{m\, m_F}{\left(R_F + h\right)^2} = m \frac{v^2}{(R_F + h)}$$

ebből a keringési sebesség:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma\, m_F}{\left(R_F + h\right)}}$$

Ezért a Föld körül keringő test folyamatosan szabadon esik a Föld felé, miközben van egy vízszintes irányú sebességkomponense is. Így esése közben „kifogy alóla” a Föld, mondhatnók, „körbeesi” a Földet. Ez a „súlytalanság” állapota. A test nincs alátámasztva (felfüggesztve), nincs „súlyerő”. Hat rá viszont a gravitációs erő, ez okozza a gyorsulását.

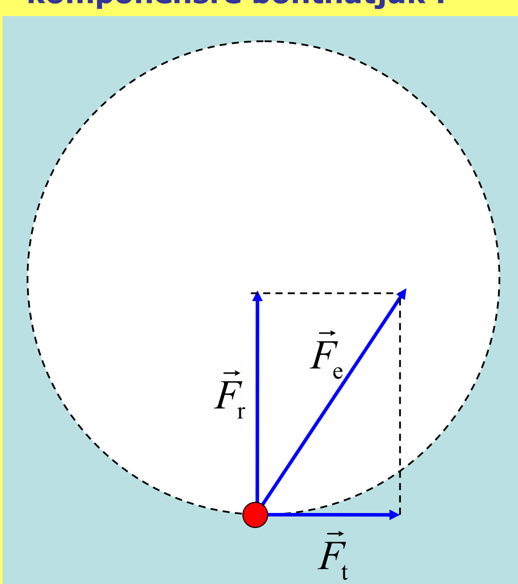
Ha $h << R_F \rightarrow$ $R_F + h \cong R_F$ így: $v = \sqrt{\frac{\gamma\, m_F}{R_F}} = \sqrt{g R_F} = 7{,}9\, \frac{\text{km}}{\text{s}}$ ez az ún. első kozmikus sebesség.

Ekkorra vízszintes irányú sebességgel kell rendelkeznie egy testnek a Föld felszínének közelében (praktikusan a sűrű légkör felett), hogy ne essen vissza a Földre, hanem keringjen körülötte.

Kényszermozgások

A nem-egyenletes körmozgás dinamikája:

Általános esetben az eredő erőt két egymásra merőleges komponensre bonthatjuk :



<u>tangenciális</u> (pályamenti)

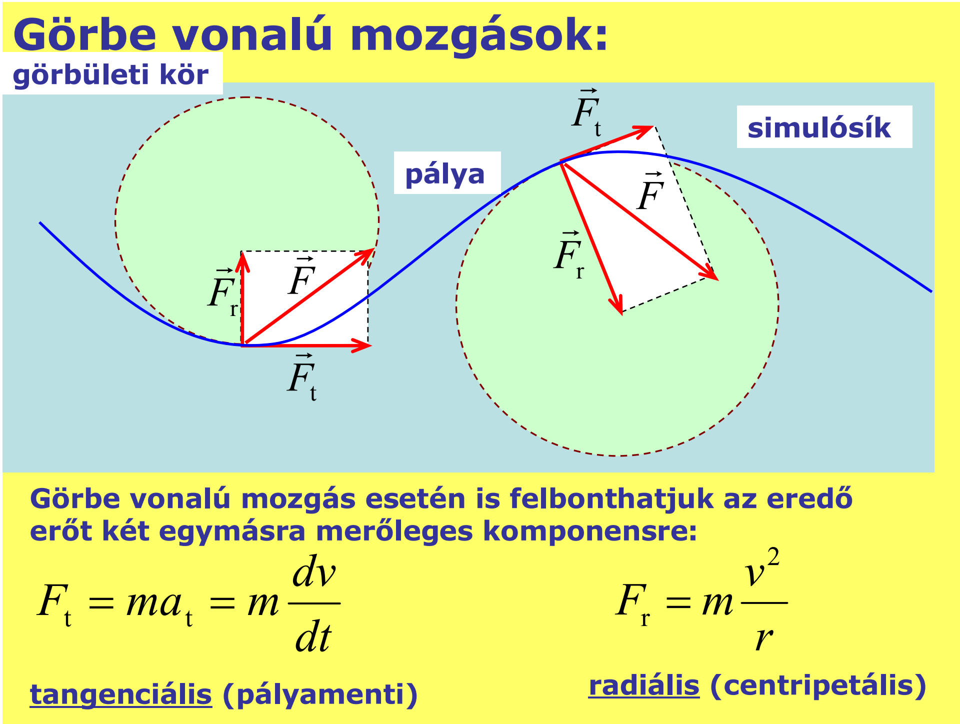
$$F_t = m a_t = m \frac{dv}{dt}$$

<u>radiális</u> (centripetális)

$$F_r = m \frac{v^2}{r}$$

$$\vec{F}_e = \vec{F}_r + \vec{F}_t$$

A nem-egyenletes körmozgásnál, mivel a kerületi sebesség nagysága is változik, fellép egy kerületi gyorsulás. Ehhez rendelhető a tangenciális (pályamenti) erő-komponens. Az eredő erő a centripetális és a tangenciális erők vektori eredője lesz.



Ahogy a kinematikában láttuk, minden görbe vonalú mozgás esetén a gyorsulás felbontható két, egymásra merőleges komponensre, a tangenciális és a radiális gyorsulásra. Az ezekhez tartozó erőket egyszerűen képezhetjük Newton II. axiómájának felhasználásával.

Mozgást akadályozó erők

Súrlódás

Ha egy testet egy vízszintes felületen valamilyen sebességgel elindítunk, akkor annak mozgása fokozatosan lassul, míg végül megáll. A két egymáson elmozduló felület között fellép tehát egy relatív mozgásukat akadályozó erő, amit csúszási súrlódási erőnek nevezünk. A tapasztalat szerint a **csúszási súrlódási erő** első közelítésben csupán a két felület közti F_k nyomóerővel arányos, de nem függ a felületek nagyságától és relatív sebességétől:

$F_s = \mu F_k$ vagy vektor alakban: $\vec{F}_s = -\mu F_k \frac{\vec{v}}{v}$

A negatív előjel azt jelenti, hogy a súrlódási erő iránya mindig ellentétes a felületek relatív sebességének irányával. A μ arányossági tényezőt **csúszási súrlódási együttható**nak nevezzük, értéke az érintkező felületek anyagi minőségétől függ.

Súrlódásról egy felületen nyugvó test esetén is beszélhetünk, ugyanis az csak akkor kezd el a felületen csúszni, ha a ráható felülettel párhuzamos erő nagysága elér egy meghatározott F_{t0} küszöbértéket. Az elindulást akadályozó F_t erőt **tapadási súrlódási erő**nek nevezzük. A tapadási súrlódási erő F_{t0} küszöbértékére is igaz, hogy független a felületek nagyságától, csak a felületek minőségétől függ és egyenesen arányos a felületek közötti nyomóerő nagyságával, azaz $F_{t0} = \mu_0 F_k$ alakban írható fel, ahol μ_0 a **tapadási súrlódási együttható**, amelynek értéke mindig meghaladja a megfelelő csúszási súrlódási együttható értékét, azaz $\mu_0 > \mu$. Az F_t erőre így a következő összefüggést írhatjuk fel: $F_t \le \mu_0 F_k$

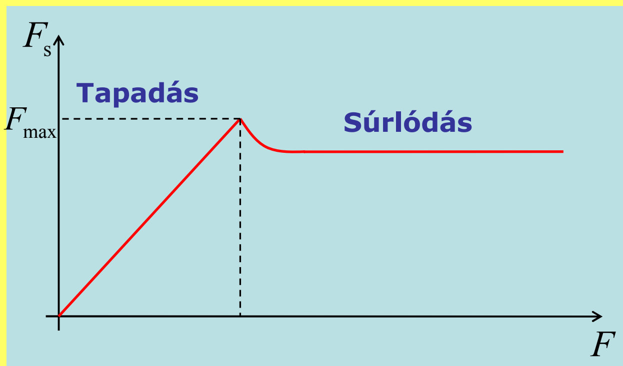
Egy felületen nyugvó test esetén F_t éppen akkora, hogy a testre ható szabaderők felülettel párhuzamos komponensét kiegyensúlyozza.

Mozgást akadályozó erők

Súrlódás: **A csúszási súrlódási erő első közelítésben csupán a két felület közti F_k nyomóerővel arányos, de nem függ a felületek nagyságától és relatív sebességétől.**

$$F_s = \mu F_k;\quad \vec{F}_s = -\mu F_k \frac{\vec{v}}{v};$$ μ: **csúszási súrlódási együttható**

Tapadási súrlódási erő:



$$F_{t0} = \mu_0 F_k$$

$$\mu_0 > \mu$$

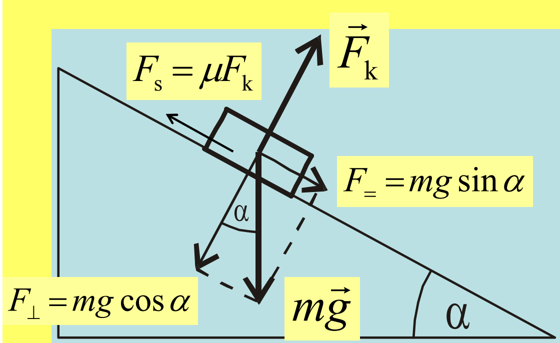
$$F_t \le \mu_0 F_k$$

Az ábrán a súrlódási erőt (F_s) látjuk a testre alkalmazott erő (F) függvényében. Látható, hogy a súrlódási erő nagysága egyenlő az alkalmazott erőével mindaddig, amíg a test nem mozdul meg. Ez a tapadási súrlódás. Amikor a test megmozdul, a súrlódási erő lecsökken, és állandó értékűvé válik. Itt már csúszási súrlódásról beszélünk, hiszen a test mozog a felülethez képest.

A súrlódási erő oka egyrészt a testek érdessége. A kis kiálló részek egymásba akadnak, eltörnek, deformálódnak, rezgésbe jönnek. Súrlódás során hő keletkezik. Másrészt, ha nagyon sima a két felület, már részecskék közötti vonzóerő is jelentőssé válik. (A Mérnöki Karon a modelltanterv szerint a mérnökhallgatóknak a 2. szemeszterben van a Fizika laboratóriumi gyakorlat. Ennek keretében kísérleti úton meghatározzák több test tapadási súrlódási együtthatóját.) Az elv az, hogy amikor a lejtő hajlásszögének növelése során a test éppen megcsúszik, akkor a hajlásszög tangensének számértéke megegyezik a tapadási súrlódási együttható értékével. (Lásd az ábrán!) Ez megfelel a felső ábrán a szaggatott vonal által jelzett pillanatnak.

Mozgást akadályozó erők

Lejtő súrlódással:



Fizika labor!

Amikor a test éppen megcsúszik a lejtőn:

$$F_{t0} = \mu_0 F_k$$

$$F_{t0} = \mu_0 mg\cos\alpha$$

$$F_{t0} = mg\sin\alpha$$

$$\mu_0 mg\cos\alpha = mg\sin\alpha$$

$$\mu_0 = \mathrm{tg}\,\alpha$$

Közegellenállás

Közegellenállásnak nevezzük a folyadékban, illetve légnemű közegben mozgó testek esetén fellépő, mozgást akadályozó erőt. A súrlódással szemben a közegellenállás függ a mozgó test sebességétől és alakjától is. Kis sebességek esetén, amikor a test körül kialakuló áramlás réteges, a közegellenállás arányos a sebességgel, s azzal ellentétes irányú:

$$\vec{F}_{\mathrm{ke}} = -k\vec{v}$$

ahol a k közegellenállási tényező függ a közeg anyagi minőségétől, a mozgó test alakjától és méretétől. Nagyobb sebességek esetén a test körüli áramlás örvényessé válik, ami a közegellenállás megnövekedéséhez vezet: $F_{\mathrm{ke}} \sim v^2$. Pl. levegőben: $F_{\mathrm{ke}} = \frac{1}{2} C\rho A v^2$. Ahol A a test sebességre merőleges keresztmetszete (homlokfelülete), ρ a levegő sűrűsége, és C az ellenállás-tényező vagy alaktényező (értéke gömb alakú testnél 0,5, szabálytalan alakúnál 2 is lehet) – Lásd a hidrodinamikában!

Egymáshoz képest mozgó vonatkoztatási rendszerek

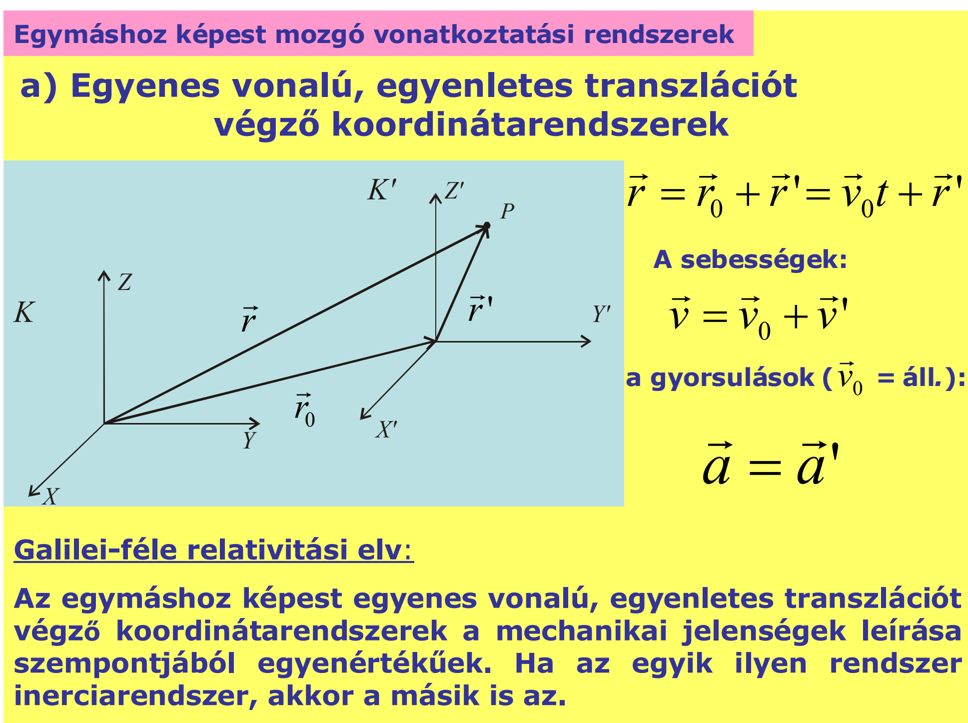
A mechanika alaptörvényei inerciarendszerben érvényesek. (Erre fogalmaztuk meg azokat.) Nézzük meg, miként módosulnak a mechanikai törvények, ha egymáshoz képest mozgó vonatkoztatási rendszerekben írjuk fel őket!

a) Egyenes vonalú, egyenletes transzlációt végző koordinátarendszerek

Tételezzük fel, hogy a K' vonatkoztatási rendszer K-hoz képest $\vec{v}_0$ állandó sebességű, egyenes vonalú, egyenletes transzlációt végez, valamint, hogy a $t = 0$ időpillanatban a két koordinátarendszer kezdőpontja egybeesett. Egy tömegpont helyzetét K-ban jellemezze az $\vec{r}$ helyvektor, míg K'-ben az $\vec{r}\,'$ helyvektor. Legyen $\vec{r}_0$ a K' rendszer origójának helyvektora a K rendszerben. Látható, hogy

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}\,' = \vec{v}_0 t + \vec{r}\,'$$

Ebből idő szerinti differenciálással a sebességekre a



következő összefüggést kapjuk: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$

Ez, az ún. „sebességösszeadási törvény" (egyenes vonalú, egyenletes transzlációt végző koordinátarendszerek esetére a klasszikus mechanikában). Pl. ha egy a Földhöz képest $\vec{v}_1$ sebességgel haladó vonatból, a vonathoz képest $\vec{v}_2$ sebességgel kihajítok egy testet, akkor a test Földhöz viszonyított sebessége e kettő (vektori) összege lesz. (Itt a Földet inerciarendszernek vettük. Hamarosan látni fogjuk, hogy ez nem igaz, de sok esetben ettől eltekinthetünk. Azt is látni fogjuk majd a speciális relativitáselmélet tárgyalásakor, hogy a fény vákuumbeli sebességét megközelítő sebességeknél ez az egyszerű összeadás már hamis eredményre vezet. Ezért ott új szabály kell.)

A $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$-t még egyszer differenciálva idő szerint (nem feledve, hogy $\vec{v}_0$ = áll.): $\vec{a} = \vec{a}'$

A tömegpont gyorsulása tehát mindkét rendszerben ugyanaz. Nyilván a tömegpontra ható eredő erő is ugyanaz, hiszen az csak a többi testhez viszonyított relatív elhelyezkedéstől és sebességektől függ. A tömeg pedig a klasszikus mechanikában a vonatkoztatási rendszer megválasztásától független állandó. Azaz ha egy magára hagyott tömegpont nem gyorsul *K*-ban, akkor nem fog gyorsulni *K'*-ben sem. Mindez azt jelenti, hogy ha a *K* vonatkoztatási rendszer inerciarendszer, akkor minden hozzá képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző *K'* vonatkoztatási rendszer is az. (Ha *K* nem inerciarendszer, akkor minden hozzá képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző *K'* vonatkoztatási rendszer sem az.)

A ható erők, tömegek, gyorsulások azonosságából következik, hogy az egyes rendszerekben a közöttük fennálló relációk is ugyanolyan alakúak lesznek. Más szóval a mechanikai jelenségek alapján nem tehető különbség az egymáshoz képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző vonatkoztatási rendszerek között. Ezt a tényt fejezi ki a **Galilei-féle relativitási elv**:

Az egymáshoz képest egyenes vonalú, egyenletes transzlációt végző koordinátarendszerek a mechanikai jelenségek leírása szempontjából egyenértékűek. Ha az egyik ilyen rendszer inerciarendszer, akkor a másik is az.

Gyakori hiba vizsgán, hogy ennél a tételnél vki. csak a Galilei-féle relativitási elvet említi meg. Ez önmagában, a fenti értelmezés és levezetés nélkül kevés, és különösen nem meggyőző, ha példákkal és a megértést, lényeget tükröző gondolatmenettel nincs alátámasztva.

b) Gyorsuló transzlációt végző koordinátarendszerek

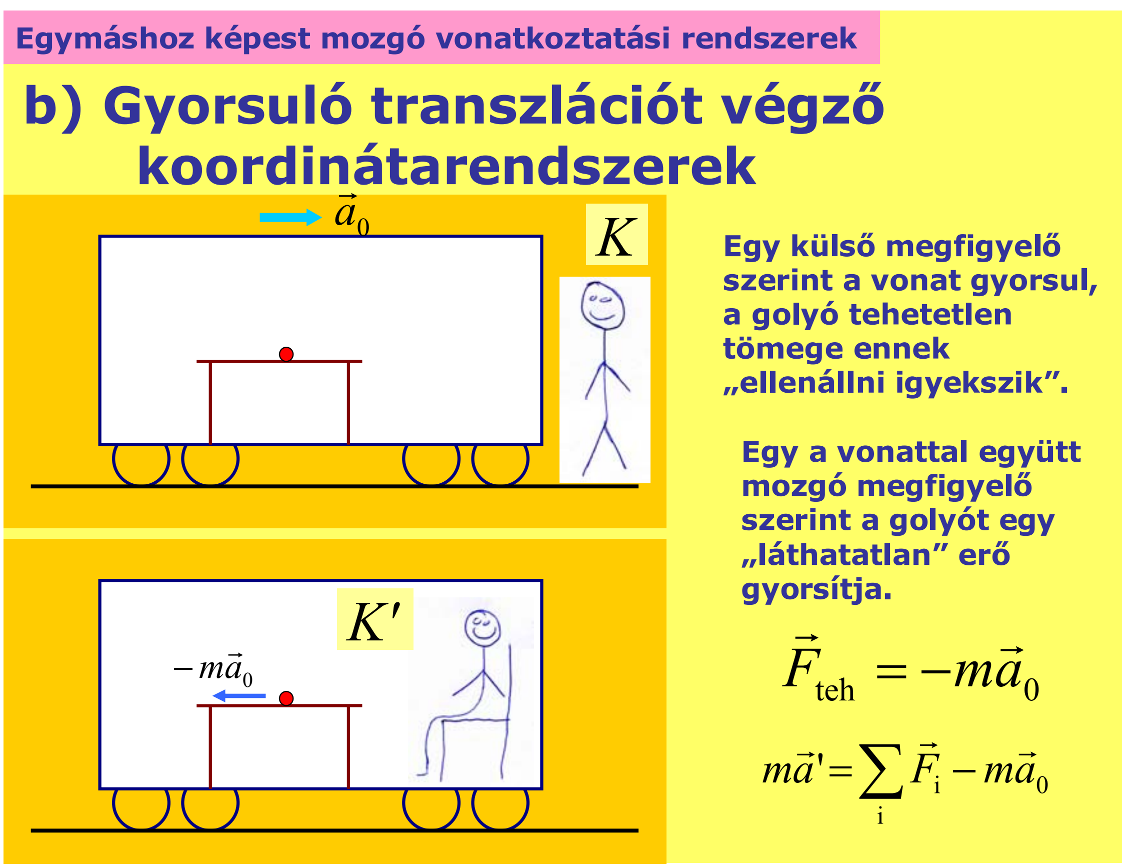
Elevenítsük fel újra azt az inerciarendszerek bevezetésénél említett gondolatkísérletet, amelyben egy $\vec{a}_0$ gyorsulással mozgó vonaton elhelyezett asztalon figyeljük egy biliárdgolyó viselkedését!

Ilyenkor mindig érdemes visszalapozni a hivatkozott részhez. (Itt a 45. old.) Ez segíti a megértést, a memorizálást, az összefüggések áttekintését, az egységes szemléletmód kialakulását. És a vizsgán két tételnél is eladhatjuk ugyanazt! ☺

A vonaton ülő megfigyelőhöz képest a golyó $-\vec{a}_0$ gyorsulással mozog, noha semmiféle másik test sem rendelhető hozzá ehhez a mozgásállapot változáshoz. Persze a peronhoz rögzített K inerciarendszerből nézve a golyó egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, a gyorsuló vonat a hozzá rögzített asztallal együtt egyszerűen kiszalad a golyó alól. A K' rendszerbeli megfigyelő a golyó általa észlelt gyorsulását a dinamika alapegyenlete szerint egy $-m\vec{a}_0$ erőnek tulajdonítja. Vagy akár fordítva, ha a megfigyelő $\vec{F} = m\vec{a}_0$ erővel biztosítja a golyó nyugalmi helyzetét, úgy az egyensúly miatt fel kell tételeznie egy $-m\vec{a}_0$ erő létét.

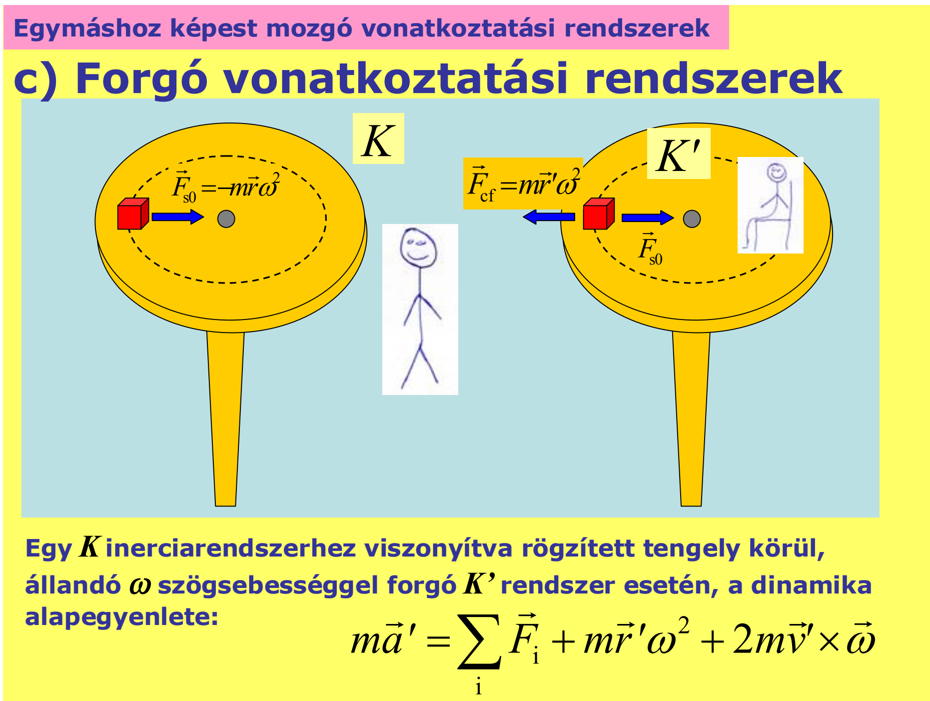
Mindezek alapján, ha egy inerciarendszerhez képest $\vec{a}_0$ gyorsulással mozgó rendszerben is használni akarjuk a dinamika alapegyenletét, akkor az inerciarendszerben is fellépő valódi erőkhöz hozzá kell adnunk az $\vec{F}_{\mathrm{teh}} = -m\vec{a}_0$ ún. **tehetetlenségi erő**t. Így a K' vonatkoztatási rendszerben a dinamika alapegyenletének általános alakja a következőképpen írható fel: $m\vec{a}' = \sum_{\mathrm{i}} \vec{F}_{\mathrm{i}} - m\vec{a}_0$.

A „valódi erő” azt jelenti, hogy egy másik test okozza. A tehetetlenségi erő azért nem valódi erő, mert nem egy másik test okozza, hanem a gyorsuló rendszerből és test tehetetlenségéből fakad.

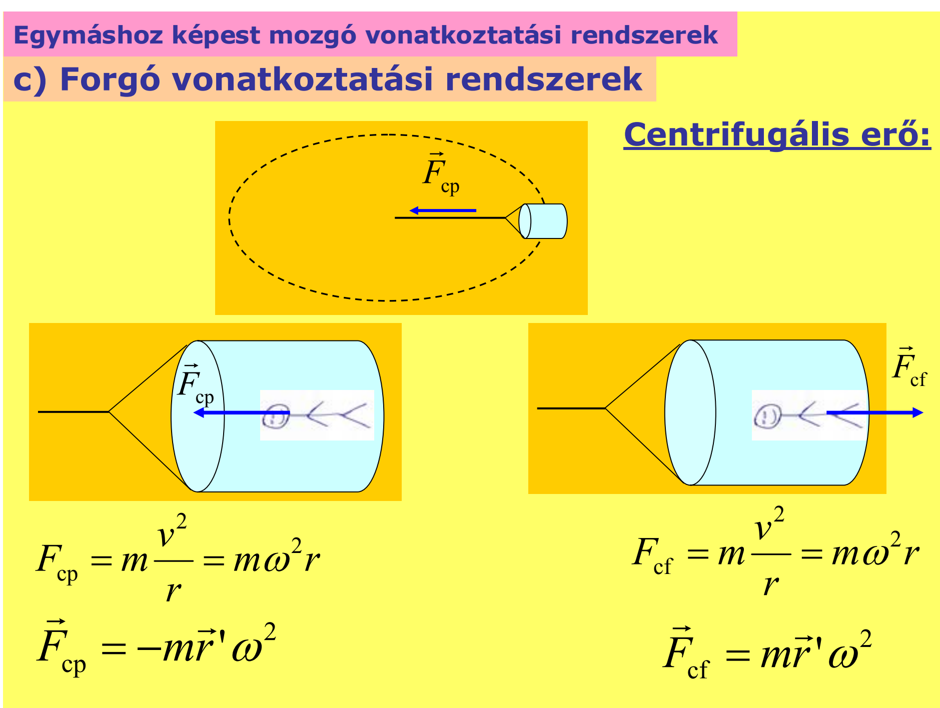


c) Forgó vonatkoztatási rendszerek

A gyorsuló transzlációt végző vonatkoztatási rendszerekhez hasonlóan a forgó vonatkoztatási rendszerekben is fellépnek a valódi erők mellett tehetetlenségi erők. A levezetés mellőzésével csupán közöljük, hogy egy *K* inerciarendszerhez viszonyítva rögzített tengely körül állandó ω szögsebességgel forgó *K'* rendszer esetén a dinamika alapegyenlete: $m\vec{a}'=\sum_{\mathrm{i}}\vec{F}_{\mathrm{i}}+m\vec{r}'\omega^2+2m\vec{v}'\times\vec{\omega}$ alakban írható fel, ahol $\vec{r}'$ és $\vec{v}'$ a tömegpont K' rendszerbeli helyvektorát és sebességét jelentik. A fellépő kétféle tehetetlenségi erőt centrifugális erőnek: $\vec{F}_{\mathrm{cf}}=m\vec{r}'\omega^2$, és Coriolis-erőnek: $\vec{F}_{\mathrm{Co}}=2m\vec{v}'\times\vec{\omega}$ nevezzük.



A centrifugális erő egy olyan tehetetlenségi erő, mely a forgástengelytől sugárirányban kifelé mutat a forgó rendszerben. Az alábbi ábrán láthatjuk egy megpörgetett hordóban levő megfigyelőre ható erők inerciarendszerbeni, ill. a forgó rendszerben történő leírását. Az inerciarendszerben hat a centripetális erő, mely a körpályán történő mozgást okozza.

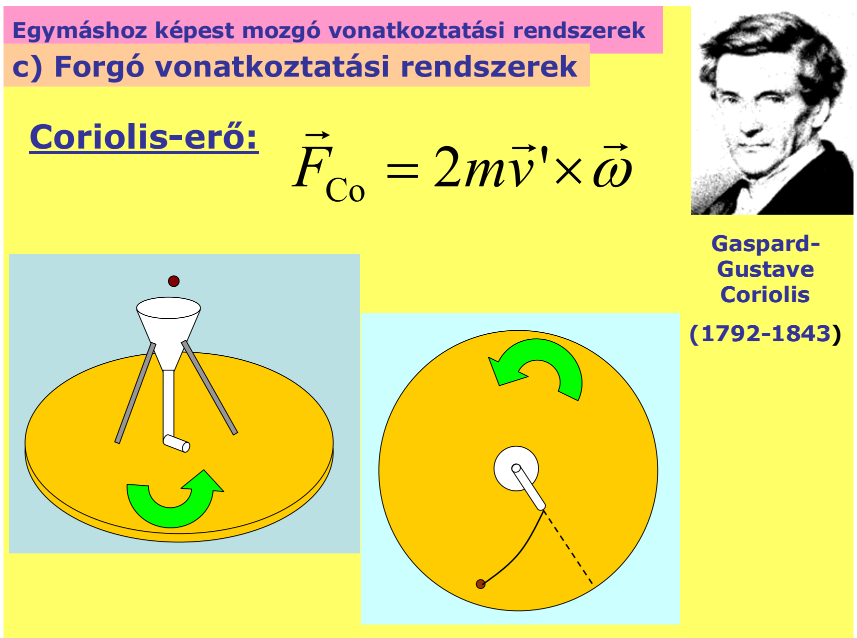


Ez egy valódi erő (a kötél, ill. a hordó alja közvetíti) és a forgástengely felé mutat. A forgó rendszerben a centrifugális erő lép fel, amely nem valódi erő, nem test okozza, és ez a forgástengelyre merőlegesen kifelé mutat.

Gyakori hiba, hogy a centrifugális erőt a centripetális erő „ellenerejének” definiálja vki. Ez nem igaz! A kettő nem együtt lép fel, mert más rendszerben használjuk az egyiket ill. a másikat. Inerciarendszerben a centripetális-, míg a forgó rendszerben a centrifugális erőt használjuk.

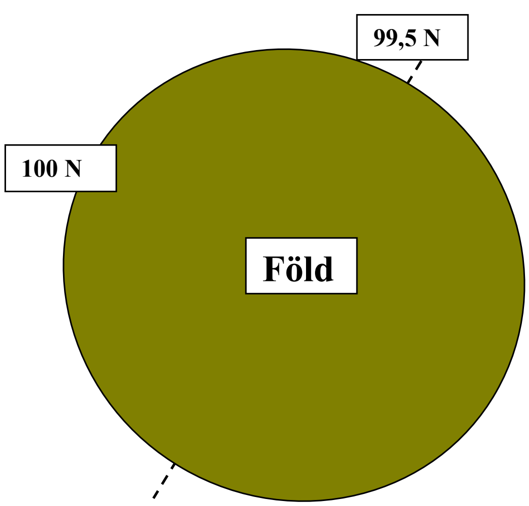
A Coriolis-erő

Képzeljük el, hogy az ábrán látható korongot megpörgetjük, majd a tölcsérbe egy golyót dobunk! A második ábra felülnézetből mutatja, hogy a golyó milyen pályát ír le. A koronggal együttmozgó megfigyelő ezt úgy „érzi”, mintha egy „láthatatlan” erő a golyó sebességére merőlegesen hatna, és így eltérítené az egyenes vonalú pályájától. Ez a tehetetlenségi erő a Coriolis-erő: $\vec{F}_{\mathrm{Co}} = 2m\vec{v}'\times\vec{\omega}$. Látjuk, hogy ez az erő mindig merőleges a sebességvektorra és a szögsebesség-vektorra, és irányát a jobbkéz-szabály határozza meg. (Lásd. vektoriális szorzat!) Az ábrán láthatóan a sebességvektorra jobbra merőlegesen hat a Coriolis-erő, és így a golyót mindig a sebességéhez képest jobbra téríti el. Itt a forgás pozitív irányú (az $\vec{\omega}$ felfelé mutat). Negatív forgásiránynál balra térülne el.



Tehetetlenségi erők a forgó Földön:

A Föld $\omega = \frac{2\pi}{86164}\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ szögsebességgel forog tengelye körül. (Az állócsillagokhoz viszonyítva. A Naphoz képest 24·60·60 = 86400 s a körülfordulási idő.) Ezért a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben is fellép a centrifugális erő és a Coriolis-erő. A centrifugális erőnek tulajdonítható a Föld lapultsága és (részben) a felszíni gravitációs gyorsulás (*g*) helyfüggése. Valójában az *mg* súlyerő a Newton-féle gravitációs törvényből fakadó nehézségi erő és a centrifugális erő eredője. Ennek következménye az, hogy az egyenlítőn kisebb a testek súlya, mint a sarkokon.



A Földön fellépő Coriolis-erő vizsgálatához célszerű $\vec{\omega}$-t két komponensre bontanunk: $\omega_1 = \omega \sin\varphi$ és $\omega_2 = \omega \cos\varphi$. A φ földrajzi szélességű helyen levő megfigyelő számára ω_1 függőleges, míg ω_2 vízszintes irányú. Így a Coriolis-erő is két komponensre bontható: $\vec{F}_{C1} = 2m\vec{v}\times\vec{\omega}_1$ és $\vec{F}_{C2} = 2m\vec{v}\times\vec{\omega}_2$.

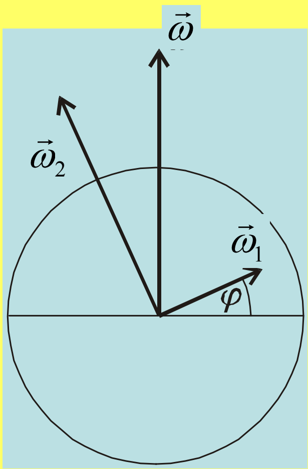
Egymáshoz képest mozgó vonatkoztatási rendszerek

c) Forgó vonatkoztatási rendszerek

A forgó Föld: $\omega = \dfrac{2\pi}{86164}\,\dfrac{1}{s}$

$$\omega_1 = \omega \sin\varphi$$

$$\omega_2 = \omega \cos\varphi$$



Coriolis erő:

$$\vec{F}_{C1} = 2m\vec{v}\times\vec{\omega}_1$$

$$\vec{F}_{C2} = 2m\vec{v}\times\vec{\omega}_2$$

Az $\vec{F}_{C1}$ erő az északi féltekén vízszintes síkban mozgó testeknél a sebességre merőlegesen jobbra mutató erőt jelent (a déli féltekén balra mutatót). Ezen erő következményeként a folyók a jobb partjukat mossák az északi féltekén, de szerepe megfigyelhető a passzátszelek, ciklonok kialakulásánál is.

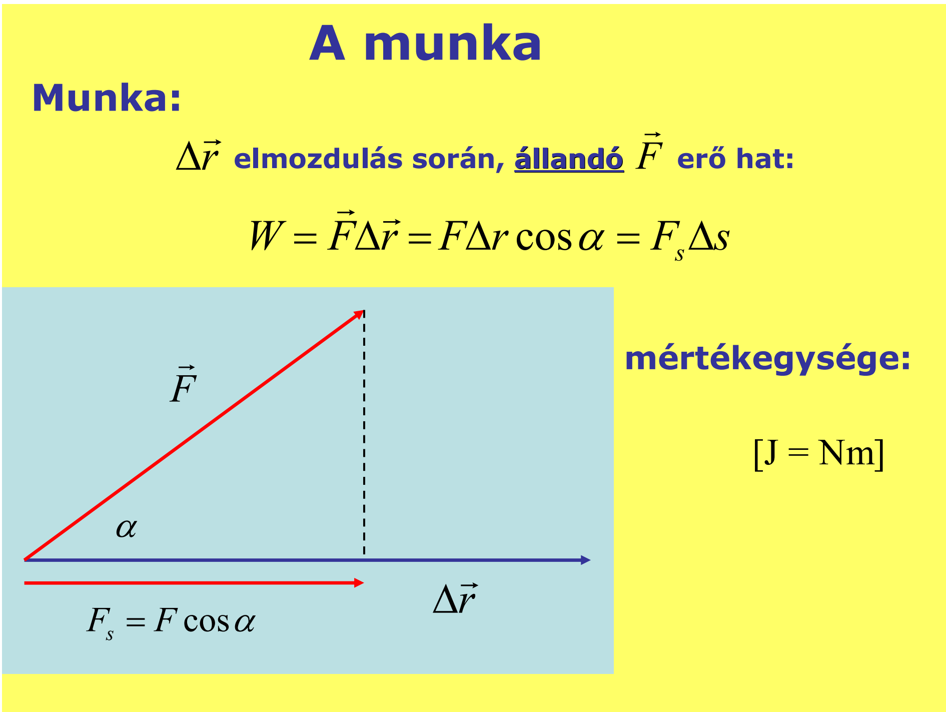
A Coriolis-erő $\vec{F}_{C1}$ komponense játszik szerepet a Foucault-féle inga kísérletben is. 1851-ben Foucault a párizsi Panthenonban egy 67 m hosszú kötélre egy 28 kg tömegű testet függesztett, és így egy síkingát képezve demonstrálta a Föld forgását. A lengő tömegre egy tűt helyezve, az a talajra terített homokba rajzolta a mindenkori lengés síkját. Így látható volt, hogy a lengési sík 15°/h sebességgel elfordul észak-kelet-dél irányba. Mivel az inga megtartja lengési síkját, alatta a Földnek kell elfordulnia. Ez a művelt közönség számára bizonyította a Föld forgását.

Az $\vec{F}_{C2}$ erő a függőlegesen lefelé eső testeknél keleti irányú elmozdulást okoz, 100 m magasságnál 1,5 cm-t a mi szélességi körünkön. A kelet-nyugati irányba mozgó testeknél pedig függőleges irányba mutat, mégpedig úgy, hogy a nyugat felé mozgó testeknél az északi féltekén súlynövekedést okoz (Eötvös effektus).

A Coriolis-erő hatásait megértendő (és a vizsgán demonstrálandó), érdemes a készülés során az erő irányának meghatározását a vektorszorzás szabályainak alkalmazásával gyakorolni!

Munka és energia

Noha a dinamika alaptörvényeinek közvetlen alkalmazása lehetővé teszi a mechanikai problémák megoldását, bizonyos esetekben mégis gyorsabban célhoz érünk, ha az erők és gyorsulások helyett egyéb leszármaztatott fizikai mennyiségeket használunk. A fizikában különösen hasznosnak bizonyult a munka és az energia fogalmának bevezetése és alkalmazása.



Tekintsünk egy testet, amelynek egyenes vonalú elmozdulása legyen $\Delta\vec{r}$ miközben **állandó** $\vec{F}$ erő hat rá. Az $\vec{F}$ erő által végzett **munká**nak az $\vec{F}$ és $\Delta\vec{r}$ vektorok skaláris szorzata által definiált mennyiséget nevezzük: $W = \vec{F}\Delta\vec{r} = F\Delta r\cos\alpha$, amit úgyis megfogalmazhatunk, hogy a végzett munka megegyezik az erő elmozdulás irányába mutató komponensének (F_s) és az elmozdulásnak a szorzatával: $W = F_s\Delta s$. A munka tehát (mivel skalárszorzat eredménye) skalár mennyisség.

A munka definíciójából adódóan nem történik munkavégzés, ha az erő és az elmozdulás merőlegesek egymásra. A munka negatív, ha az elmozdulás és az erő elmozdulás irányú vetülete ellentétes irányúak, azaz ha α tompaszög.

A munka mértékegysége a joule [J = Nm].

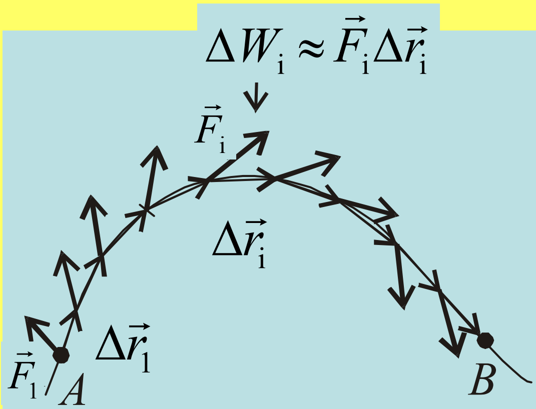
Az előbbi definíció – mint láttuk – akkor igaz, ha az erő változatlan (nagysága és iránya is állandó) az elmozdulás során. Hogyan számolhatjuk ki a munkát, ha az, az elmozdulás során változik?

Pl. nézzük meg, hogy egy $\vec{F}(\vec{r})$ erőtérben, ahol az erő pontról pontra változik, egy tetszőleges görbe vonalú pályán mozgó tömegpont esetén a pálya A és B pontjai között miképpen számíthatjuk ki az erőtér általi munkavégzést az iménti egyszerű definícióra visszavezetve!

Osszuk fel az A és B pontok között a pályát N db apró szakaszra! Legyenek ezek a pályadarabok olyan rövidek, hogy egy adott tartományon belül az erőtér már ne változzon számottevően, s bármelyik pályadarabka a két végét összekötő $\Delta\vec{r}_i$ elmozdulásvektorral jól közelíthető legyen!

Munka

Ha az erő <u>változik</u> az elmozdulás során:



Az i. pályadarab mentén végzett munka:

$$\Delta W_\mathrm{i} \approx \vec{F}_\mathrm{i}\Delta\vec{r}_\mathrm{i}$$

$\vec{F}_\mathrm{i}$ **az adott pályadarab tetszőleges pontjában ható erő.**

Az *A* és *B* pontok között végzett (teljes) munka:

$$W_{A\to B} \approx \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \vec{F}_\mathrm{i}\Delta\vec{r}_\mathrm{i}$$

Pontosan:

$$W_{A\to B} = \lim_{\mathrm{N}\to\infty}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \vec{F}_\mathrm{i}\Delta\vec{r}_\mathrm{i} = \int_A^B \vec{F}\,d\vec{r} \quad \textbf{vagy:} \quad W_{A\to B} = \int_A^B F_s ds$$

Ha több erő hat: $\vec{F} = \sum_\mathrm{i} \vec{F}_\mathrm{i}$

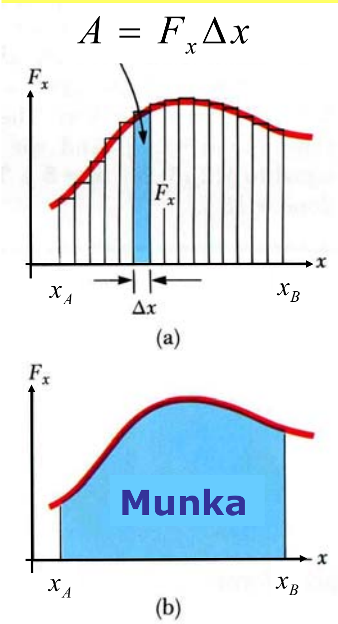
A munka az erő elmozdulás (út) szerinti integrálja.

Nyilván minél finomabb felosztást választunk, ezek a feltételek annál jobban teljesülnek. Az i. pályadarab mentén végzett munkát jól közelíthetjük a $\Delta W_\mathrm{i} \approx \vec{F}_\mathrm{i}\Delta\vec{r}_\mathrm{i}$ mennyiséggel, ahol $\vec{F}_\mathrm{i}$ az adott pályadarab tetszőleges pontjában (pl. kezdőpontjában) ható erő. Így az *A* és *B* pontok között végzett munkára az alábbi becslést adhatjuk: $W_{A\to B} \approx \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \vec{F}_\mathrm{i}\Delta\vec{r}_\mathrm{i}$

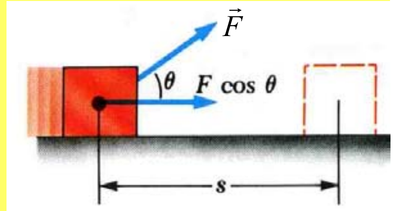
Ha az osztáspontok számát minden határon túl növeljük, mégpedig úgy, hogy az egyes pályadarabkák hossza minden határon túl csökkenjen, akkor a fenti összeg határértéke precízen megadja a végzett munkát: $W_{A\to B} = \lim_{\mathrm{N}\to\infty}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \vec{F}_\mathrm{i}\Delta\vec{r}_\mathrm{i} = \int_A^B \vec{F}\,d\vec{r}$ ahol az egyenlet jobboldalán álló szimbólumot az $\vec{F}$ erő *A* és *B* pontok közötti **pályamenti integrál**jának (vonalintegráljának) nevezzük. (Az integrált írhatjuk így is: $W_{A\to B} = \int_A^B F_s ds$, ahol F_s az erőnek a pillanatnyi elmozdulás irányába eső komponense.) Általános esetben tehát a munkát az erő pályamenti integrálásával határozhatjuk meg. Ha a tömegpontra több erő hat, akkor az $\vec{F} = \sum_\mathrm{i} \vec{F}_\mathrm{i}$ eredő erő munkája megegyezik az egyes erők munkáinak algebrai összegével.

A fent elmondottakat illusztrálandó nézzük az alábbi ábrát, ahol az F_x erőt ábrázoltuk az x elmozdulás függvényében!

Munka



Munka:



$$W_{x_A \to x_B} \approx \sum_{x_A}^{x_B} F_x \Delta x$$

$$W_{x_A \to x_B} = \int_{x_A}^{x_B} F_x dx$$

A munka az erő elmozdulás (út) szerinti integrálja.

(Vonalintegrál, lásd matek!)

Az (a) ábrán egy téglalap területének számértéke, $F_x \Delta x$, megegyezik a kis Δx szakaszon végzett munkával, ha az erőt a kis szakaszon állandónak vesszük. Így, ha a görbe alatti területet közelítjük a sok kis téglalap területének összegével, számértékben a változó F_x erő x_A és x_B közötti munkájának számértékét közelítjük:

$$W_{x_A \to x_B} \approx \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x \ .$$

A görbe alatti terület pontos mérőszámát, (b) ábra, integrálással kapjuk meg: $W_{x_i \to x_f} = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$.

Ez adja meg a végzett munka pontos értékét.

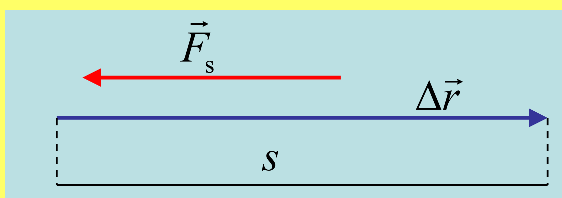
Az integrálás precízebb és mélyebb kifejtését lásd a matematikai analízis tárgynál!

Néhány példa:

Munka

Pl. a súrlódási erő által végzett munka:

$$W = -F_s s$$



A negatív előjel onnan adódik, hogy a súrlódási erő ellentétes irányú az elmozdulással, azaz az erő és az elmozdulás 180°-os szöget zárnak be, és:

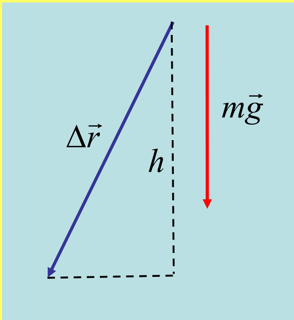
$$\cos 180^{\circ} = -1$$

$$W = \vec{F}\Delta\vec{r} = F\Delta r \cos\alpha$$

Itt F_s a súrlódási munkát jelenti. Nyilván ebben az esetben ez megegyezik az elmozdulás egyenesébe eső erővel (F_s).

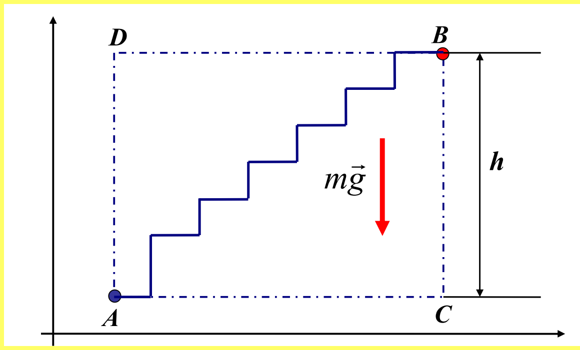
Munka

A gravitációs erő által végzett munka:



$$W = \vec{F}\Delta\vec{r} = F\Delta r\cos\alpha$$

$$W = mgh$$



Itt *g* állandó.

Változó *g* esetén, lásd később (a gravitációs térnél)!

Homogén gravitációs térben (ahol a gravitációs térerősség, ill. gyorsulás minden pontban állandó), a munkavégzés ugyanannyinak adódik az *A* és *B* közötti bármelyik úton. Ha pl. *B*-ből előbb *C*-be, majd onnan *A*-ba megyünk, a *BC* úton végzett munka: *mgh*. (Az erő és az elmozdulás szöge 0, és cos 0 = 1.) A CA szakaszon az erő és az elmozdulás közti szög 90°, és cos 90° = 0.)

Bármilyen utat választok is, az mindig függőleges és vízszintes szakaszokra osztható, ahol a vízszintes szakaszokon a gravitációs tér munkája zérus lesz, míg a függőleges szakaszokon az összegzés után: *mgh*. Ez jó közelítéssel igaz a Föld felszínén kis magasságkülönbségek esetén. (Azt az általánosabb esetet, amikor a gravitációs tér magassággal történő változását is figyelembe vesszük, később tárgyaljuk.)

Munka

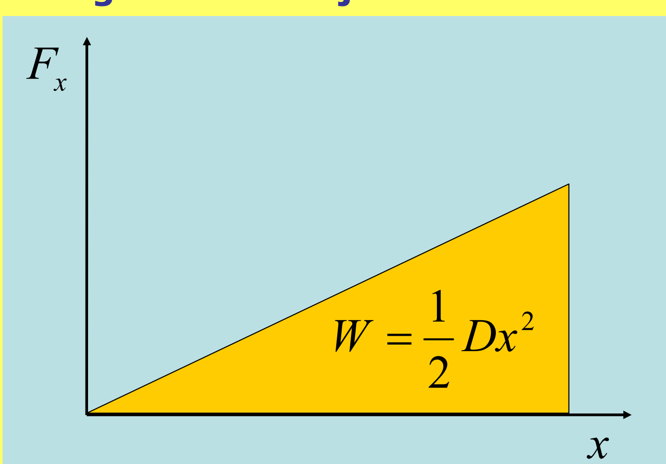
A rugóerő által végzett munka:

A rugóerő nagysága:

$$F_x = Dx$$

$$W = \frac{Dx \cdot x}{2} = \frac{1}{2}Dx^2$$

A rugóerő munkája:



Ahogy az ábrán látjuk, a rugóerő 0-tól lineárisan nő a maximális *Dx* értékig.

Az erő – elmozdulás grafikonon, a munkát jellemző terület mérőszáma, azaz a háromszög területe: $Dx \cdot x/2$.

Ez adja meg a rugóerő munkáját *x* elmozdulás során.

Ha részletesebben elemezzük, akkor különbséget kell tennünk aszerint, hogy az aktuális rugóerő iránya egybeesik-e a test elmozdulásának irányával, vagy pedig azzal ellentétes. Ha az erő és az elmozdulás irányát is vizsgáljuk (tehát nem csak a nagyságát, mint fent), akkor az egyik esetben a rugóerő munkája

Munka

A rugóerő által végzett munka:

A rugóerő: $F_x = -Dx$

A rugóerő munkája,

ha az elmozdulás megegyezik az erő irányával:

$$W = \frac{-Dx \cdot (-x)}{2} = \frac{1}{2} Dx^2$$

$$W = \int_x^0 -Dx\,dx = \frac{1}{2} Dx^2$$

ha az elmozdulás ellentétes az erő irányával:

$$W = \frac{-Dx \cdot x}{2} = -\frac{1}{2} Dx^2$$

$$W = \int_0^{-x} -Dx\,dx = -\frac{1}{2} Dx^2$$

pozitívnak adódik (a rugó végez a testen munkát), másik esetben pedig negatívnak (a test végez a rugón munkát). A végzett munkát elegánsabban kiszámíthatjuk a megfelelő integrálásokkal is.

A teljesítmény

Gyakran fontos az is, hogy a munkavégzés milyen sebességgel megy végbe. Ez, a munkavégzés sebességét, vagy az „időegység alatt végzett munkát" jellemző mennyiség a teljesítmény.

Az átlagos teljesítmény a munka és az elvégzéséhez szükséges idő hányadosa:

$P = \frac{W}{t}$ vagy $P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$ pontosabban a pillanatnyi teljesítmény: $P = \frac{dW}{dt}$, azaz a munka idő szerinti differenciálhányadosa.

Mértékegysége a watt: $\left[\mathrm{W} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} \right]$

A munkát és a teljesítmény mértékegységét ugyanazzal a betűvel jelöljük. Ne keverjük őket!

A teljesítmény egy régebbi (nem SI) mértékegysége a lóerő [LE]: 1 LE = 0,736 kW.

Egy $\vec{v}$ sebességgel mozgó testen az $\vec{F}$ erő által kifejtett teljesítmény:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v}$$

Mivel egy P teljesítménnyel t ideig történt munkavégzés nagysága: $W = Pt$, gyakran a munka (és az energia) mértékegységét a teljesítmény mértékegységéből származtatva adják meg.

Pl. 1 joule = 1 wattszekundum: J = Ws,

vagy amit a „villanyszámlán" is látunk, a „kilowattóra": 1 kWh = 3,6·10^6 J.

Az energia

Az energia a fizikában egy fontos fogalom. Ez is az ún. „megmaradó mennyiségekhez” tartozik, azaz nagyon sok folyamatban kiindulási és végösszege megegyezik. A megmaradó mennyiségekre (mint még pl. a tömeg, az impulzus, az elektromos töltés, stb.) mérlegegyenleteket írhatunk fel (az egyenlet két oldalán szereplő mennyiségeknek meg kell egyezniük) és ez sok folyamat leírását megkönnyíti.
Az energia az előbb tárgyalt munkavégzéssel hozható kapcsolatba. Először lássunk egy általános definíciót, majd példákon keresztül alkalmazzuk a fogalmat!
Egy meghatározott *A* állapotban levő test (vagy rendszer) energiával rendelkezik, ha megfelelő körülmények között munkavégzésre képes. Energiáját azzal a munkával mérjük, amelyet a test végez, míg egy *A* állapotból a megállapodás szerint választott A_0 állapotba jut, vagy azzal a munkával, amelyet a testre ható erők ellenében végeznünk kell, míg A_0-ból *A*-ba juttatjuk.
Az energia mértékegysége megegyezik a munkáéval. [J, kWh]
Az energiának többféle fajtáját különböztetjük meg. A mechanikában a két legfontosabb, a mozgási (kinetikus) és a helyzeti (potenciális) energia. Nézzük meg, mit jelentenek ezek!

Energia

A kinetikus energia

Állandó $\vec{F}_\mathrm{x}$ erő hasson *x* irányban egy *m* tömegű testre.
***s* úton történő elmozdulás során a végzett munka:**

$$W = F_\mathrm{x} s = (m a_\mathrm{x}) s$$

$$a_\mathrm{x} = \frac{v - v_0}{t}$$

$$s = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$

$$W = m\left(\frac{v - v_0}{t}\right)\frac{1}{2}(v + v_0)t$$

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2$$

A mozgási (kinetikus) energia: $E_\mathrm{kin} = \frac{1}{2}mv^2$

Skalár, mértékegysége ua. mint a munkáé: [J]

Tehát egy test mozgása, sebessége révén energiával (munkavégző képességgel) bír. Ez az energia a tömeggel egyenesen, a sebességgel négyzetesen arányos.

Energia

A kinetikus energia tétele

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 \quad \Longrightarrow \quad W = \Delta E_{\mathrm{kin}}$$

Egy tömegpont kinetikus energiájának <u>megváltozása</u> megegyezik a ráható erők eredője által végzett munkával.

Vagy:

egy mozgó tömegpont munkavégző képességgel rendelkezik, azaz kinetikus energiájának csökkenése árán munkát végezhet.

Ha egy test mozgási energiája megváltozik, az azt jelenti, hogy munkavégzés történt. Vagy rajta végzett munkát egy erő, aminek következtében nőtt a mozgási energiája, vagy a test végzett munkát a környezetén, a mozgási energiájának csökkenése révén.

Egy folyamat során a mozgási energia változása felírható, mint a végső állapotbeli energia és kezdeti energia különbsége:

$W = \Delta E_{\mathrm{kin}} = E_{\mathrm{kin},B} - E_{\mathrm{kin},A}$ (Ügyeljünk rá, hogy mindig a végállapotból vonjuk ki a kezdeti állapotot!)

Ez nem-állandó erő esetén is igaz. Egy x irányú erőnél:

$$W_{x_A \to x_B} = \int_{x_A}^{x_B} F_x dx = \int_{x_A}^{x_B} ma\, dx \qquad \text{ahol} \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}, \qquad \text{azaz:}$$

$$W_{x_A \to x_B} = \int_{x_A}^{x_B} mv\frac{dv}{dx} dx = \int_{v_A}^{v_B} mv\, dv = \frac{1}{2}m{v_B}^2 - \frac{1}{2}m{v_A}^2$$

Általános esetben: $W_{A \to B} = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{r}$; $\quad W = \int_{x_A, y_A, z_A}^{x_B, y_B, z_B} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz \right)$

Tehát, az erő által végzett munka a mozgási energia megváltozását eredményezi.

Potenciális (helyzeti) energiáról egy erőtérben lévő test esetén beszélhetünk, amelyik a (más testekhez viszonyított) helyzeténél fogva képes munkavégzésre. Ilyen lehet pl. egy tömegpont gravitációs erőtérben, egy megfeszített rugó végére akasztott test, vagy egy elektromos töltés az elektromos térben. A helyzeti és a mozgási energia a mechanika energiaformái. (Egyéb energiafajták is léteznek, elektromágneses, hő, kémiai, nukleáris, stb. Ezekről máshol tárgyalunk majd.)

Az előbb láttuk, hogy a gravitációs erő által végzett munka független attól, hogy milyen úton jutottunk el a kiindulási pontból a végpontba, ez a munka csak a két pont helyzetétől függ.

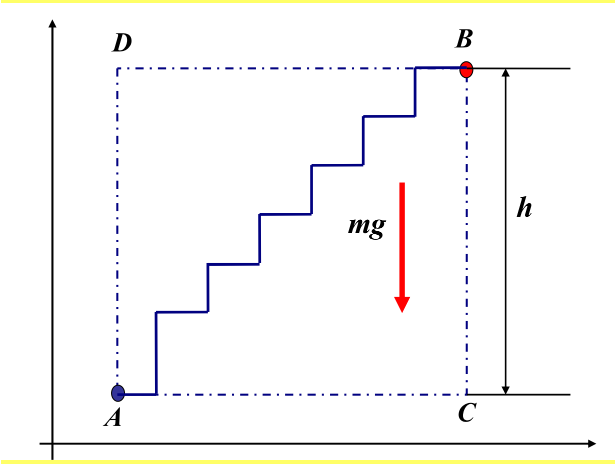
Általánosan, az olyan erőt, amelyre ez a feltétel teljesül, azaz, amelynél a munkavégzés csak a testek kezdeti és végpontjától függ, de független attól, hogy milyen útvonalon jutottunk el egyik pontból a másikba **konzervatív erőnek** nevezzük. (Mert „konzerválja” az energiát.) Az ilyen erőtereket pedig, mint amilyen a gravitációs erőtér, konzervatív erőtérnek.

Energia

Gravitációs potenciális energia

Gravitációs erőtérben két tetszőleges pont közötti munkavégzés csak a pontok helyzetétől függ, de független attól, hogy milyen útvonalon jutottunk el egyik pontból a másikba.

külső erő a tér ellen:



$$W_{AB} = mgh$$

a grav. tér:

$$W_{AB} = -mgh$$

$$W = \vec{F}\Delta\vec{r} = F\Delta r\cos\alpha$$

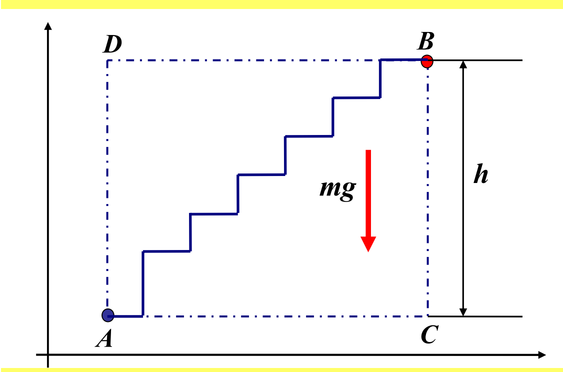
Itt *g* állandó. Ha *g* változik a magassággal, lásd később (a gravitációs térnél)!

Nemkonzervatív (disszipatív) erők esetén, a munka függ az úttól. Ilyen pl. a súrlódás során végzett munka. Ilyenkor a munka részben hővé alakul. Nyilván a hosszabb úton nagyobb mennyiségű munka fordítódik hő keltésére (azonos súrlódási erő esetén).

Potenciális energia

Konzervatív erő

Ha testet a gravitációs erőtérben egy tetszőleges görbe mentén mozgatjuk körbe, a végzett munka zérus, hiszen:



$$W_{AB} = -W_{BA}$$

$$mgh - mgh = 0$$

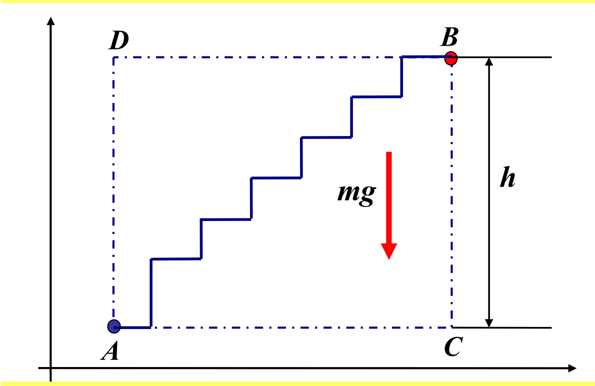
Konzervatív erő által tetszőleges zárt görbe mentén végzett munka zérus.

$$\sum^{\mathrm{O}} \vec{F}_{\mathrm{i}}\Delta\vec{r}_{\mathrm{i}} = 0 \qquad \textbf{pontosabban:} \qquad \oint \vec{F}\,d\vec{r} = 0$$

Ha testet a gravitációs erőtérben egy tetszőleges görbe mentén mozgatjuk körbe, a végzett munka zérus, hiszen bármely két pontja között az egyik úton ugyanannyi a munkavégzés mint a másikon. Tehát, ha az „odaúton” *mgh* munkát végez egy erő, akkor a „visszaúton” – *mgh* munkát. **Konzervatív erőtérnek nevezzük azt az időben állandó erőteret, amelyben tetszőleges zárt görbe mentén a végzett munka zérus,** azaz konzervatív erőtér esetén az erő zárt görbén vett integrálja zérus: $\oint \vec{F}\,d\vec{r} = 0$.

Potenciális energia **Konzervatív erő**

Ha testet a gravitációs erőtérben egy tetszőleges görbe mentén mozgatjuk körbe, a végzett munka zérus, hiszen:



$$W_{AB} = -W_{BA}$$

$$mgh - mgh = 0$$

Konzervatív erő által tetszőleges zárt görbe mentén végzett munka zérus.

$$\sum^{O} \vec{F}_i \Delta \vec{r}_i = 0 \qquad \textbf{pontosabban:} \qquad \oint \vec{F}\, d\vec{r} = 0$$

Konzervatív erők esetén (de csak ekkor!) a végzett munkát felírhatjuk a potenciális energia negatív megváltozásaként. (Ne feledjük, a változást mindig úgy definiáljuk, hogy a végállapotból vonjuk ki a kezdőállapotot!) Mivel a munkavégzés csak a helyzetek különbségétől függ, választhatunk egy viszonyítási helyet, ahol a potenciális energiát zérusnak vesszük. Ehhez viszonyítva minden más helyhez egy meghatározott potenciális energia tartozik. Tehát a potenciális energia függvény csak a helytől függ. Pl. gravitációs térben (vegyünk most egy homogén teret, azaz *g* állandó) a padló szintjén 0-nak véve a potenciális energiát, a padló felett *h* magasságban *mgh* lesz.

Potenciális energia **Konzervatív erőterek**

A gravitációs erőtérhez hasonló tulajdonságú erőtereket, ahol a tetszőleges zárt görbe mentén a végzett munka zérus, konzervatív erőtérnek nevezzük.

$$\oint \vec{F}\, d\vec{r} = 0$$

Konzervatív erőterekben két pont között az erőtér által (vagy ellenében) végzett munka csak a pontok helyzetétől függ, és független a pontokat összekötő úttól.

Ezért konzervatív erőterekben mindig megadható egy olyan skalárfüggvény, a potenciális energia függvény, amelynek a végpontokban felvett értékei különbségeként megkapjuk a végzett munkát.

$$W = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} = E_{\mathrm{pot},A} - E_{\mathrm{pot},B} = -\Delta E_{\mathrm{pot}}$$

Potenciális energia függvény csak konzervatív erőterek esetén definiálható.

A *P* pontban a potenciális energiát tehát a gravitációs erő P_0-tól P-ig vett integrálja -1 szereseként számoljuk ki. A gravitációs erő pedig az elmozdulással ellentétes: $-mg$. Ha a P_0-ban zérusnak vesszük a potenciális energiát, akkor a számolás eredményeként adódik a *P* pontbeli potenciális energiára az *mgh*. Az is látható,

hogy a munkavégzés szempontjából tkp. mindegy, hogy hol választjuk meg az alappontot. Hiszen a két helyzet közötti különbség mindig ugyanaz marad, és a munkavégzés szempontjából csak ez számít. Pl. ha a padló alatt 1m-re választanánk a nulla helyzetet, akkor a padló szintjén a potenciális energia $mg \cdot 1\text{m}$ lenne. Ha testet a padlótól 2m-re emeljük, akkor a gravitációs erő ellenében végzett munka $mg \cdot 2\text{m}$ lenne mivel a potenciális energia megváltozása: $mg \cdot 3\text{m}$ (a végpontbeli potenciális energia) – $mg \cdot 1\text{m}$ (a kezdőpontbeli potenciális energia) = $mg \cdot 2\text{m}$ (a potenciális energiák különbsége).
Összefoglalva tehát azt mondhatjuk, hogy konzervatív erőterében egy test mozgatása során végzett munkát a potenciális energia függvény végpontokban felvett értékeinek különbsége adja. Vagy ha az erőtér által végzett munkát tekintjük, akkor az egyenlő a potenciális energia negatív megváltozásával.
Potenciális energia függvény korántsem definiálható mindig, csak konzervatív erőterek esetén létezik. Elég például arra gondolnunk, hogy súrlódási vagy közegellenállási erő jelenléte esetén két pont között a végzett munka nyilván nem független a megtett úttól, azaz nem létezhet olyan skalárfüggvény, amelynek segítségével csupán a végpontok ismeretében megkaphatnánk a végzett munkát.

A mechanikai energia megmaradásának tétele

Tekintsünk egy tömegpontot, mely kizárólag konzervatív erők hatására mozog! A rá ható eredő erő munkája egyfelől a kinetikus energia megváltozását eredményezi, másfelől ezt a munkát a potenciális energia negatív megváltozásaként is felírhatjuk:

$$W = \Delta E_{\mathrm{kin}}; \quad W = -\Delta E_{\mathrm{pot}}; \quad \Delta E_{\mathrm{kin}} = -\Delta E_{\mathrm{pot}}$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} = -\left(E_{\mathrm{pot},B} - E_{\mathrm{pot},A}\right)$$

Az A és B pontbeli értékeket azonos oldalra rendezve:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + E_{\mathrm{pot},A} = \frac{1}{2}mv_B^2 + E_{\mathrm{pot},B} \qquad \text{vagy} \qquad \Delta(E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{pot}}) = 0$$

A felső egyenletek fejezik ki a mechanikai energia megmaradásának tételét: **egy konzervatív erőtérben mozgó tömegpont kinetikus és potenciális energiájának összege a mozgás folyamán állandó.**

$$E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{pot}} = E_{\mathrm{mech}} = \mathrm{const}$$

A kinetikus és potenciális energia összege adja teljes mechanikai energiát. Úgy is megfogalmazhatjuk, hogy amennyivel megváltozik a potenciális energia, ugyanannyival változik a kinetikus energia. A teljes változás előjeles összege tehát zérus.
Példaként tekintsünk egy magasról leejtett testet! Az elengedés pillanatában a potenciális energiája: mgh_{max}. (Ahol h_{max} a talajszinttől mért maximális távolság, és a nullhelyzetet a talajszinten választottuk.) A kinetikus energiája itt nulla, mivel a sebessége nulla. Tehát a teljes energiája:

$$E = mgh + \frac{1}{2}mv^2 = mgh_{\mathrm{max}}$$

Valahol félúton a teljes energia a kinetikus és potenciális energiák összegeként adódik:

$E = mgh + \frac{1}{2}mv^2$ ahol a v az adott pillanatban a test sebessége és h a talajszint feletti magassága.

A becsapódás pillanatában a test helyzeti energiája nulla lesz (ezt választottuk alappontnak, $h = 0$), míg a mozgási energiája itt éri el a maximális értéket, hiszen a sebessége itt lesz maximális:

$$E = mgh + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$$

Természetesen itt a légellenállástól eltekintettünk, hiszen ekkor már nem csak konzervatív erők hatnának a testre. Ebben az esetben már nem alkalmazhatnánk a mechanikai energia megmaradásának tételét.

Nézzük meg, hogy a mechanikai energia megmaradásának tétele miként érvényesül pl. egy rugó végére akasztott, harmonikus rezgőmozgást végző test esetén!

Egy ideális rugó által kifejtett erő arányos és ellentétes irányú az egyensúlyi helyzettől mért x kitéréssel, és $F_x = -Dx$ alakban írható fel, ahol D a rugóra jellemző ún. direkciós állandó.

A rugóerő is konzervatív erő, tehát itt is használhatjuk a potenciális energiát. Láttuk, hogy a rugóerő munkája: $W = \frac{1}{2}Dx^2$, a potenciális energiája pedig: $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}Dx^2$, $E_{\text{pot}}(x) = \int_0^x \left(-F(x)\right)dx = \int_0^x Dx\,dx = \frac{1}{2}Dx^2$

A mozgási energiája pedig: $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$

A teljes mechanikai energia: $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$ ahol A a maximális kitérés, azaz az amplitúdó. Ez azt jelenti, hogy a maximális kitérés esetén, amikor a test egy pillanatra megáll, a teljes mechanikai energiát a helyzeti energia adja, mivel a mozgási energia nulla. Ezután a helyzeti energia egyre csökken, átalakul mozgási energiává, és az $x = 0$ egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor a teljes energiát a mozgási energia tag adja, ekkor maximális a sebesség értéke. Ezután a mozgási energia értéke csökken, és a másik fordulópontban ismét a helyzeti energiával lesz egyenlő a teljes energia. Itt sem feltételeztünk súrlódási erőket.

Hasonlókat mondhatunk el egy ingamozgást végző test esetén is.

Nézzük meg mi a helyzet, ha nemkonzervatív (disszipatív) erők is hatnak!

Legyen W_{k} a konzervatív, és W_{nk} a nemkonzervatív erők által végzett munka! A mozgási energia teljes megváltozását mind a konzervatív, mind a nemkonzervatív erők munkája együttesen adja:

$$W_{\text{nk}} + W_{\text{k}} = \Delta E_{\text{kin}}$$

Tudjuk, hogy a konzervatív erők által végzett munka a potenciális energia negatív megváltozásával egyenlő: $W_{\text{k}} = -\Delta E_{\text{pot}}$

Tehát nemkonzervatív erők munkája mechanikai energia megváltozásával lesz egyenlő:

$W_{\text{nk}} = \Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_{\text{pot}} = \Delta E_{\text{mech}}$ Tehát ekkor, a teljes mechanikai energia a mozgás folyamán nem állandó, hanem megváltozása a nemkonzervatív erő(k) által végzett munkával egyezik meg.

A tapasztalat azonban azt mutatja, hogy nemkonzervatív erők jelenléte esetén is fennáll a mechanikai energia megmaradásának tételénél sokkal átfogóbb **általános energiamegmaradás elve**, amely valamennyi fajta energia - a mechanikai energián kívül a hő, elektromos, kémiai és más energiafajták - összegének állandóságát fejezi ki.

Kapcsolat a konzervatív erők és a potenciális energia között

$$\oint \vec{F}\, d\vec{r} = 0 \qquad W = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} = E_{\text{pot},A} - E_{\text{pot},B} = -\Delta E_{\text{pot}}$$

A fenti összefüggések ún. integrális relációk, amelyek egy kiterjedt tértartományra állítanak valamit a konzervatív erőtereket illetően. Vizsgáljuk meg, hogy lokálisan, a tér egy adott pontjában milyen összefüggés áll fenn a potenciális energia és az erő között! Minthogy az erő integrálásával kapjuk meg a potenciális energiát, ezért sejthető, hogy a fenti reláció megfordításaként a potenciális energia valamilyen differenciálhányadosaként állíthatjuk majd elő az erőt.

Tekintsük a tér egy tetszőleges $P=(x,y,z)$ pontjának környezetében a potenciális energia függvény egy tetszőleges $d\vec{r}=(dx,dy,dz)$ elmozduláshoz tartozó megváltozását! A többváltozós függvények differenciálszámítása szerint fennáll:

$$dE_{\text{pot}} = \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial x}dx + \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial y}dy + \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial z}dz$$

Másfelől azonban a potenciális energia megváltozását az erőtér ellenében a tömegpontra kifejtett $-\vec{F}=-(F_x,F_y,F_z)$ erő $d\vec{r}$ elmozdulás során végzett munkájával is felírhatjuk, nevezetesen:

$$dE_{\text{pot}} = -\vec{F}d\vec{r} = -F_x dx - F_y dy - F_z dz$$

Kapcsolat a konzervatív erők és a potenciális energia között

$$dE_{\text{pot}} = \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial x}dx + \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial y}dy + \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial z}dz \quad \textbf{és} \quad dE_{\text{pot}} = -\vec{F}d\vec{r} = -F_x dx - F_y dy - F_z dz$$

alapján, a megfelelő elmozdulás-komponensek összevetéséből azt kapjuk, hogy a konzervatív erő egyes komponensei a potenciális energia megfelelő koordináták szerinti negatív parciális deriváltjaival egyeznek meg:

$$F_x = -\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial z}$$

A <u>gradiens</u> differenciál-operátor bevezetésével:

$$\text{grad} = \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right) \quad \textbf{pl.} \quad \text{grad}\, E_{\text{pot}} = \nabla E_{\text{pot}} = \left(\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial x} + \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial y} + \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial z}\right)$$

$$\vec{F} = -\text{grad}\, E_{\text{pot}} \quad \textbf{vagy} \quad \left(\vec{F} = -\nabla\, E_{\text{pot}}\right)$$

Azaz, konzervatív erőtérben az erő a potenciális energia negatív gradienseként állítható elő.

Kapcsolat a konzervatív erők és a potenciális energia között

$$F_x = -\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial z}$$

A fenti összefüggésekből leszármaztathatunk egy olyan kritériumot, amelynek alapján egyszerűen eldönthető egy adott erőtérről, hogy konzervatív-e vagy sem. Ha ugyanis létezik potenciális energia függvény, akkor az első *y* szerinti, illetve a 2. *x* szerinti parc. diff.-val:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 E_{\text{pot}}}{\partial y\,\partial x} \quad \textbf{és} \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 E_{\text{pot}}}{\partial x\,\partial y}$$

A vegyes parciális deriváltak egyenlősége miatt:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \Longrightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0$$

Hasonló módon kaphatunk még két analóg egyenletet:

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0 \quad \textbf{és} \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \nabla\times\vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Ha egy erőtér konzervatív, akkor rotációja szükségképpen zérus, azaz a konzervatív erőtér örvénymentes tér.

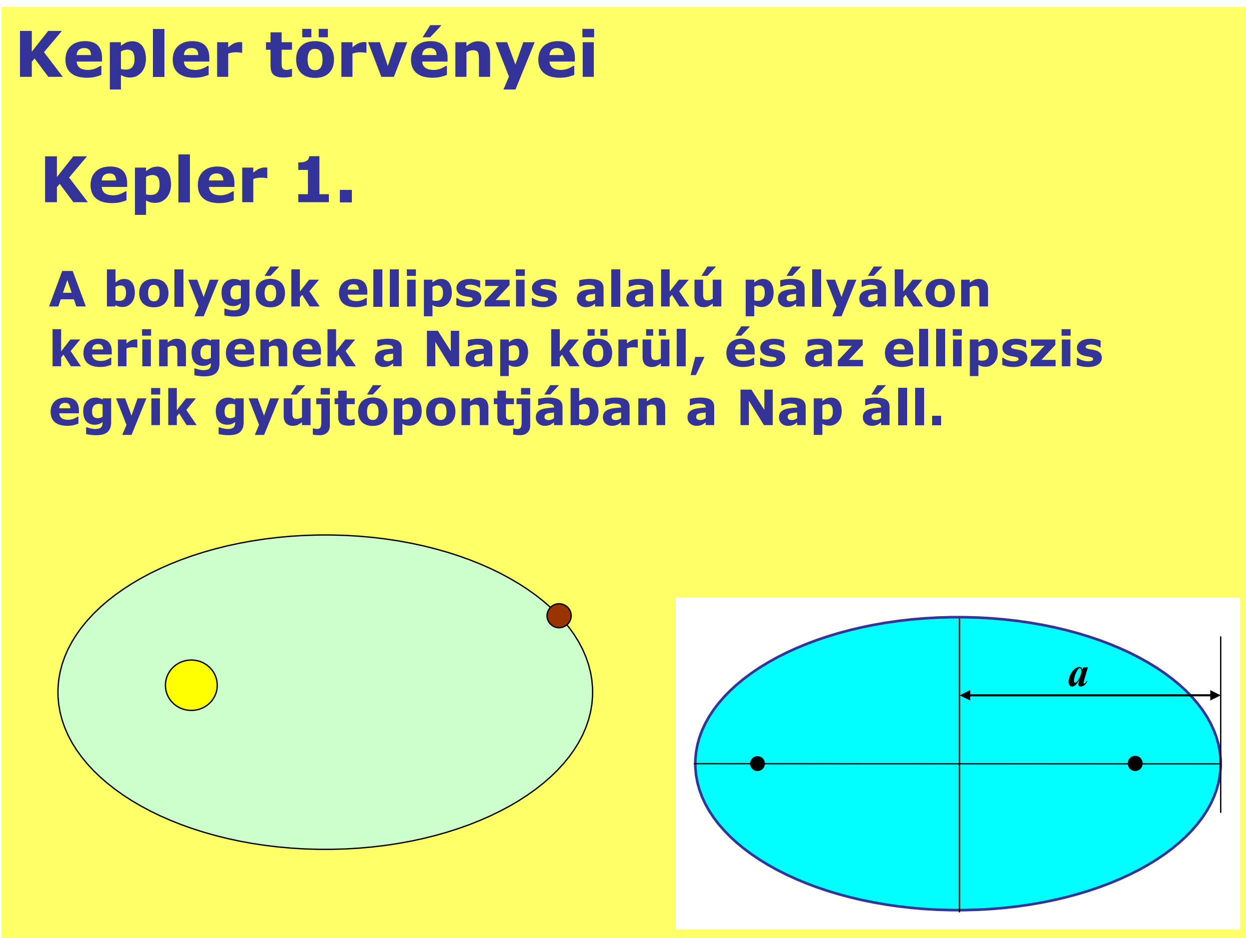
$$\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) = 0 \quad \textbf{vagy} \quad (\nabla\times\vec{F} = 0)$$

Gravitáció

A gravitáció, vagy tömegvonzás, a bevezetésben megemlített négy alapvető kölcsönhatás egyike.

A bolygók mozgása, Kepler törvényei

A bolygók mozgásának megfigyelése már az ókor óta fontos részét képezi a természet megfigyelésének. Ptolemaiosz (90 – 168) görög csillagász és matematikus nevéhez fűződik a Földközéppontú (geocentrikus) világrendszer és bolygómodell megalkotása. Ez azon az előfeltevésen alapult, hogy a mindenség középpontjában a mozdulatlan Föld áll és a bolygók csak körpályán mozoghatnak. Mivel, mint ma már tudjuk, a bolygók nem körpályán mozognak a Föld körül, ezért sok körből összerakott, bonyolult modellt kellett alkotni a látszólagos mozgásuk leírásához. Ez a modell közel kétezer évig határozta meg a csillagászatot. Kepler (1571 – 1630) nevéhez fűződik az a három híres törvény, mely túllép a körökön, és a középpontba a Föld helyett a Napot teszi. Nézzük ezt a három törvényt!



A valóságban ezek az ellipszisek csak kicsit lapultak, alig különböznek a körtől (kicsi az excentricitásuk). Az ábrák az érthetőség miatt eltúlzottak.

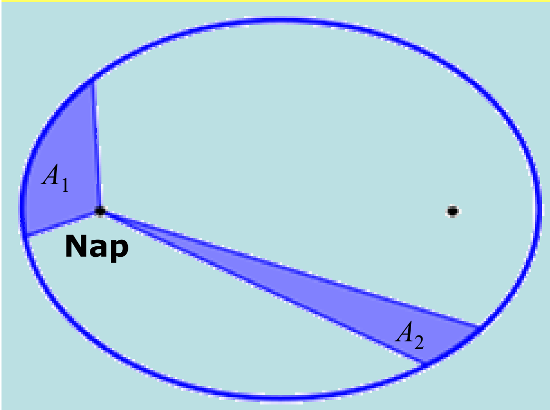
Kepler törvényei

Kepler 2.

A Naptól egy bolygóhoz húzott rádiuszvektor egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol.

(A területi sebesség tétele.)

$$t_1 = t_2$$



$$A_1 = A_2$$

$$\frac{\Delta A_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta A_2}{\Delta t_2}$$

$$\frac{dA}{dt} = \text{áll.}$$

A 2. törvény tehát azt tartalmazza, hogy a bolygót és a Napot összekötő egyenes (sugár vagy rádiuszvektor) ugyanakkora területeket súrol, ha ugyanakkora időtartamokat vizsgálunk a mozgása folyamán.
Ez azt is jelenti, hogy a súrolt felület és az idő hányadosa ($\Delta A/\Delta t$) állandó. A $\Delta A/\Delta t$ hányadost szokás területi sebességnek nevezni. Az ábráról is látható, hogy a bolygó sebessége a pálya különböző szakaszain nem ugyanakkora. Napközelben (perihélium) nagyobb, naptávolban (aphélium) kisebb.

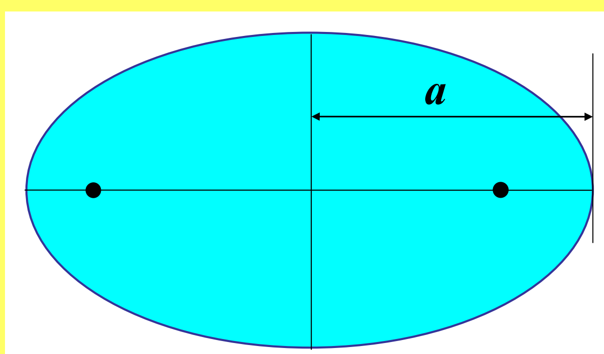
Kepler törvényei

Kepler 3.

A bolygók keringési időinek négyzetei úgy aránylanak egymáshoz, mint ellipszispályáik fél nagytengelyeinek köbei:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

$$\frac{a^3}{T^2} = C_\mathrm{N}$$



Az ábrán látható ellipszis nagytengélyének felét jelöltük a-val, a bolygó keringési idejét pedig T-vel. Tehát ha bármelyik két bolygóra jellemző T-re és a-ra felírjuk a törvényt, az teljesül. Ez a hányados egy állandó, amely a Napra jellemző: C_N.

A Naprendszerhez tartozó bolygók a Naptól kifelé haladva: Merkúr, Vénusz, Föld, Mars, Jupiter, Szaturnusz, Uránusz, Neptunusz, (a Plútó már csak törpebolygó).
Kepler idejében még csak a hat belső bolygó volt ismeretes. A most tárgyalandó gravitációs erőtörvény megalkotása tette lehetővé a már ismert bolygók pályáiban megfigyelhető anomáliák analízise alapján a külső bolygók felfedezését. (Az Uránuszt Herschel 1781-ben nem az anomáliák elemzése alapján fedezte fel, de a Neptunusz megtalálása – 1846-ban - már így történt.)

Az általános tömegvonzás törvénye

A Kepler által megfogalmazott három törvény a pontos megfigyelési adatokat tükrözi. Ezekből a tapasztalati törvényekből Newton vezette le az általános tömegvonzás törvényét. Nézzük meg, hogyan lehet levezetni ezekből a törvényekből és a dinamika alapegyenletéből ezt a törvény!

Először vezessük le a Nap által egy bolygóra kifejtett erőt Kepler 3. törvényéből!

Vegyünk egy körpályát! (Ezt megtehetjük. Az ellipszispályára vonatkozóan is ugyanerre az eredményre jutunk, de a kör esetén egyszerűbb a számolás.) A Nap által a Földre kifejtett F_{NF} vonzóerő biztosítja az r sugarú egyenletes körmozgáshoz szükséges centripetális erőt:

$$F_{\mathrm{NF}} = m_{\mathrm{F}}\frac{v^2}{r} = m_{\mathrm{F}}\omega^2 r$$ ahol m_{F} a Föld tömege r pedig az átlagos Nap – Föld távolság.

Tudjuk, hogy $\omega = 2\pi/T$, azaz: $$F_{\mathrm{NF}} = m_{\mathrm{F}}\frac{4\pi^2}{T^2}r$$ ahol T a Föld Nap körüli keringési ideje.

Kepler 3. törvényében szereplő fél nagytengely (a) most a kör sugara (r) lesz:

$$\frac{r^3}{T^2} = C_{\mathrm{N}}$$ (C_{N} csak a Naptól függő állandó)

Ezt osztva a sugár négyzetével: $$\frac{r}{T^2} = \frac{C_{\mathrm{N}}}{r^2}$$

Ezt behelyettesítve az erő kifejezésébe: $$F_{\mathrm{NF}} = 4\pi^2 C_{\mathrm{N}}\frac{m_{\mathrm{F}}}{r^2}$$ Ez a Nap által a Földre kifejtett erő,

De Newton III. törvénye alapján a Föld is ugyanekkora nagyságú, de ellentétes irányú erővel hat a Napra. És ha a Nap által kifejtett erő arányos a Föld tömegével, akkor a Föld által a Napra kifejtett erőnek is arányosnak kell lennie a Nap tömegével: $4\pi^2 C_{\mathrm{N}} = \gamma m_{\mathrm{N}}$ ahol γ sem a bolygó, sem a Nap tömegét nem tartalmazó univerzális állandó, az ún. gravitációs állandó. Így:

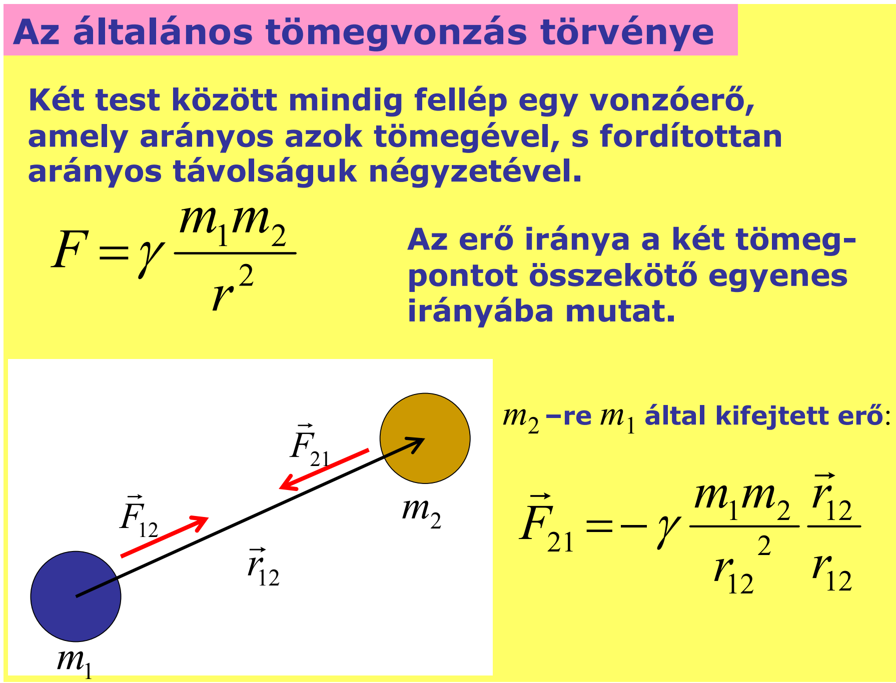
$$F_{\mathrm{NF}} = \gamma\frac{m_{\mathrm{N}} m_{\mathrm{F}}}{r^2}$$

Ez nyilván nem csak a Föld esetén igaz, hanem a többi bolygóra is hasonló törvény vonatkozik. Általánosan: a Nap az egyes bolygókra vonzóerőt fejt ki, amely arányos mind a Nap, mind az adott bolygó tömegével, s fordítottan arányos távolságuk négyzetével:

$$F = \gamma\frac{m_{\mathrm{N}} m_{\mathrm{B}}}{r^2}$$

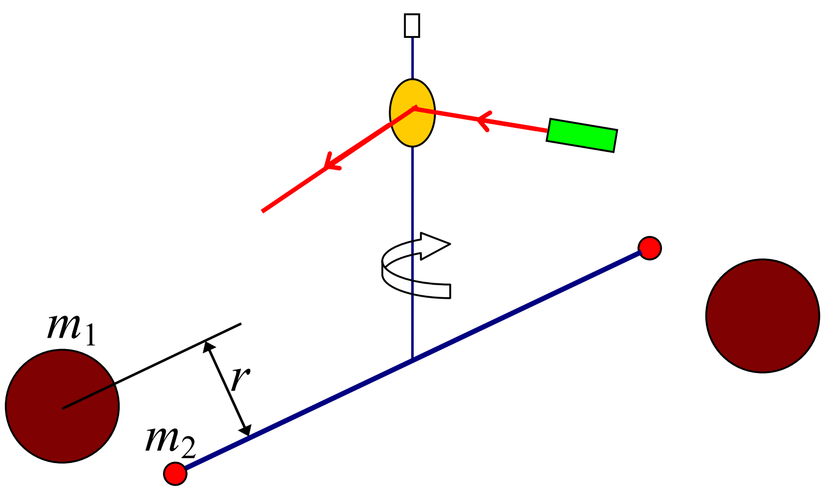
Newton felismerte, hogy e törvény alapján nemcsak a bolygók Nap körüli mozgása magyarázható, de ugyanez az erő idézi elő a Hold Föld körüli keringését, valamint a nehézségi gyorsulás jelenségét is. Eredményeit tovább általánosítva Newton kimondta, hogy az általa meghatározott erő nem csak az égitestek között figyelhető meg, hanem bármely két tömeggel rendelkező objektum között fellép. Megfogalmazta az **általános tömegvonzás törvényét**:

Két tetszőleges test között mindig fellép egy vonzóerő, amely pontszerű testek esetén arányos azok tömegével, s fordítottan arányos távolságuk négyzetével. Az erő iránya a két tömegpontot összekötő egyenes irányába mutat.



Az ábrából látható, hogy az m_1-ből az m_2-be mutató helyvektorral ($\vec{r}_{12}$) ellentétes irányú az az erő, ami az m_1 által hat az m_2-re ($\vec{F}_{21}$). A gravitáció mindig vonzóerő (tömegvonzás). A matematikai „képlet”-ben ezt fejezi ki a negatív előjel. A helyvektort elosztjuk a nagyságával, ekkor egy egységnyi nagyságú, és a helyvektor irányába mutató vektort kapunk. Az az m_1 által hat az m_2-re ható erő ($\vec{F}_{21}$) pedig ezzel ellentétes irányú, tehát ennek mínusz egyszeresét kell venni.

A γ gravitációs állandó értékét kísérleti úton tudjuk meghatározni. Nagy pontossággal először Cavendish (1731-1810) mérte meg torziós (csavarási) ingájával 1798-ban.



A mérés elve az ábráról látszik: két nagyobb tömeg közelébe egy vékony pálca végére erősített két kisebb tömeget viszünk. A pálca közepe egy vékony drótszálon függ. A tömegvonzás hatására a pálca (és vele a szál) elfordul. Az elfordulás mértéke a szálra erősített tükör segítségével felnagyítható. Az elfordulás mértékéből lehet következtetni a tömegek közti vonzóerőre. A gravitációs állandó értéke: $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$.

Az állandó értékéből látszik, hogy a gravitációs erő a mindennapi életben előforduló tárgyak között igen gyenge.

A gravitációs törvényt úgy fogalmaztuk meg, hogy tömegpontok, és a köztük levő távolság szerepelnek benne. Ez nyilván egy idealizáció. A valóságot közelítve, a nem pontszerű testek közötti gravitációs erőhatás meghatározásához a testeket pontszerűnek tekinthető tömegelemekre kell bontanunk, s az egyes tömegelemek között ható erők összegzésével (integrálásával) kaphatjuk meg az eredő erőt. Megmutatható pl., hogy a gömbszimmetrikus tömegeloszlású testek a rajtuk kívüli térrészben olyan gravitációs erőhatást fejtenek ki, mintha összes tömegük a szimmetria-középpontjukba lenne egyesítve. (Lásd a pontrendszereknél a tömegközéppont fogalmát!) Ezért számolhatunk a Cavendish-féle mérésben a gömbök középpontjai közti távolsággal és a gömbök teljes tömegével.

A gravitációs gyorsulás

A különböző testek anyagi minőségüktől függetlenül azonos g gyorsulással esnek a Föld felé, amelyet gravitációs (nehézségi) gyorsulásnak nevezünk.
Alkalmazzuk az általános tömegvonzás törvényét a jelenségre! Tekintsünk egy a Föld tömegvonzásának hatására a felszín felett h magasságban g gyorsulással szabadon eső m tömegű testet! A dinamika alapegyenlete szerint:

$F = ma = mg$ és $\gamma \dfrac{m_F m}{(R_F + h)^2} = mg$ ahol m_F a Föld tömegét és R_F a Föld sugarát jelöli. A nehézségi gyorsulás értékére kapjuk:

$$g = \gamma \frac{m_F}{(R_F + h)^2}$$ ha $h = 0$, azaz a Föld felszínén: $$g = \gamma \frac{m_F}{R_F^2}$$

Látható, hogy g értéke tényleg független a szabadon eső test tulajdonságaitól, csak a Föld tömegének és a középpontjától mért távolságnak a függvénye. (Valójában g értéke mégsem pontosan a fenti képletnek megfelelő a Föld felszínén, aminek oka egyrészt a Föld lapultsága (gömbszimmetrikustól való eltérése), valamint a Föld tengely körüli forgása miatt fellépő centrifugális erő, amely g értékét az egyenlítő mentén kissé csökkenti a sarkokon mérhető értékhez képest. Lásd a forgó vonatkoztatási rendszereknél!)

A Föld és a Nap tömege

Newton gravitációs erőtörvényének alkalmazásával lehetőség nyílik pl. a Föld és a Nap tömegének meghatározására.
A Föld felszínén, azaz a Föld középpontjától $R_F = 6370$ km távolságban mérhető nehézségi gyorsulás értékéből ($g = 9{,}81$ m/s^2) egyszerűen megkaphatjuk a Föld tömegét (m_F):

$$m_F = \frac{R_F^2}{\gamma} g = \frac{(6{,}37 \cdot 10^6)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} \underline{9{,}81 = 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}$$

A Föld sugarát már az ókori görögök is viszonylag pontosan ismerték. Ma műholdak segítségével ez nagyon pontosan meghatározható. A Föld tömegét elosztva térfogatával megkaphatjuk átlagos sűrűségét, amelynek értéke 5,5 kg/dm^3. A felszín közelében levő kőzetek sűrűsége ennél kisebb. Ez arra utal, hogy a Föld belsejében a felszín közeli kőzeteknél lényegesen nagyobb sűrűségű anyagoknak kell lenniük.

A Föld Naptól való távolságának és keringési idejének ismeretében az alábbi összefüggések felhasználásával kiszámítható a Nap tömege (m_N) is.

Kepler 3. törvényéből: $\frac{r^3}{T^2} = C_N$ és a $4\pi^2 C_N = \gamma m_N$ összefüggésből (lásd feljebb!):

$$m_N = \frac{4\pi^2 r^3}{\gamma T^2} = \underline{1{,}99 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}$$

Látható, hogy a Nap tömege több mint háromszázezerszerese a Földének.
A Nap átlagos sűrűsége: 1,4 kg/dm^3, amiből a Nap eltérő anyagi összetételére is következtethetünk. (Az anyagi összetételről sok információt kaphatunk színképelemzéssel, de ez már nem a mechanika tárgyköre.)

A tehetetlen és a súlyos tömeg

Newton második axiómája ($\vec{F} = m\vec{a}$) alapján a tömeget, mint a test tehetetlenségének mértékét definiáltuk.
A gravitációs erőtörvényben szereplő tömegek azonban nem állnak kapcsolatban a testek gyorsíthatóságával, hanem a gravitációs kölcsönhatásban való részvétel mértékét jellemzik. Éppen ezért a Newton második axiómájában ill. a gravitációs törvényben szereplő tömegek a testek két különböző tulajdonságát tükrözik. A dinamika alapegyenletében szereplő tömeget **tehetetlen tömeg**nek, míg a tömegvonzás mértékére jellemző mennyiséget **súlyos tömeg**nek nevezzük.
Az, hogy a tehetetlen tömeg arányos, illetve a már megválasztott mértékrendszerben egyenlő a súlyos tömeggel, egyáltalán nem magától értetődő, hanem kísérletileg igazolandó állítás. A tehetetlen és a súlyos tömeg egyenlőségére utal az a megfigyelés, hogy a nehézségi gyorsulás értéke minden testnél ugyanaz. Tekintsünk ugyanis két testet, amelyek súlyos és tehetetlen tömegét jelölje m_{s1}, m_{s2} illetve m_{t1}, m_{t2}. Ha a Föld felszínének közelében a testek a_1 ill. a_2 gyorsulással szabadesést végeznek a rájuk ható nehézségi erő hatására, akkor felírhatjuk:

$$\gamma \frac{m_{s1} m_F}{R_F^2} = m_{t1} a_1 \qquad \text{ill.} \qquad \gamma \frac{m_{s2} m_F}{R_F^2} = m_{t2} a_2$$

Ha $a_1 = a_2 = g$, az egyenletek jobb és baloldalait egymással elosztva kapjuk:

$$\frac{m_{s1}}{m_{s2}} = \frac{m_{t1}}{m_{t2}}$$

Azaz ha a két test tehetetlen tömegei egyenlők, akkor súlyos tömegeik is megegyeznek.
A tehetetlen és a súlyos tömeg egyenlőségének (arányosságának) a maga korában legmeggyőzőbb kísérleti igazolása Eötvös Loránd nevéhez fűződik, aki rendkívül érzékeny torziós ingájával 1:200000 pontossággal mutatta meg azonosságukat. A tehetetlen és súlyos tömeg egyenlősége teszi lehetővé a súlymérésen alapuló tömegmérést.

A tehetetlen és súlyos tömeg egyenlősége folytán gravitációs erőtérben minden test a tér egy adott pontjában tömegétől függetlenül azonos gyorsulással mozog. Mindez kísértetiesen hasonlít a gyorsuló koordinátarendszereknél elmondottakra, ahol a tehetetlenségi erők következményeként figyelhettünk meg hasonló jelenségeket. Einstein általános relativitáselméletének egyik alapposztulátuma lett az ekvivalencia elve, azaz a gyorsuló és gravitációs vonatkoztatási rendszerek egyenértékűsége.

A gravitációs erőtér

Az erővel kapcsolatos tapasztalataink túlnyomó része a testek közvetlen érintkezésén (kontaktusán) alapul. Ezzel szemben a gravitációs erő (vagy pl. amint azt később látni fogjuk, az elektromos és a mágneses erő) ún. „távolba ható” erő, hiszen a közvetítésük révén kapcsolatba került testek közvetlen érintkezés nélkül, távolról hatnak egymásra. Faraday az erőtér fogalmának bevezetésével próbálta meg visszavezetni a távolba ható erőket kontaktuson alapuló kölcsönhatásokra. Értelmezése szerint a testek maguk körül létrehoznak egy ún. erőteret (pl. gravitációs vagy elektromos erőteret), és a másik test ezzel az erőtérrel kerül közvetlen kölcsönhatásba. Így tehát a nehezen értelmezhető távolhatást közelhatással helyettesítette, ami a fizikai leírás szempontjából sokszor előnyösebb.

Általánosan a térnek azt a tartományát, amelynek minden pontjához egy bizonyos időpillanatban egyértelműen meghatározott erő tartozik, **erőtér**nek nevezzük. Matematikailag az erőtér egy vektortér, amelyet $\vec{F}=\vec{F}(\vec{r},t)$ alakban írhatunk fel. Ez azt jeleni, hogy az erő függ a helytől ($\vec{r}$) és az időtől (t) (Időben állandó erőterek esetén $\vec{F}$ az időt explicite nem tartalmazza, azaz $\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})$.)

Egyszerűen eldönthetjük, hogy a tér egy adott tartományában jelen van-e **gravitációs erőtér** vagy sem. Vegyünk ugyanis egy *m* tömegű próbatestet, s nézzük meg hat-e rá erő! Nyilván a próbatestre ható erő (az általános tömegvonzás törvényének értelmében) arányos annak tömegével. A próbatest megválasztásától független, csupán csak az erőtér tulajdonságait jellemző mennyiséghez úgy juthatunk, ha a ható erőt elosztjuk a próbatest tömegével:

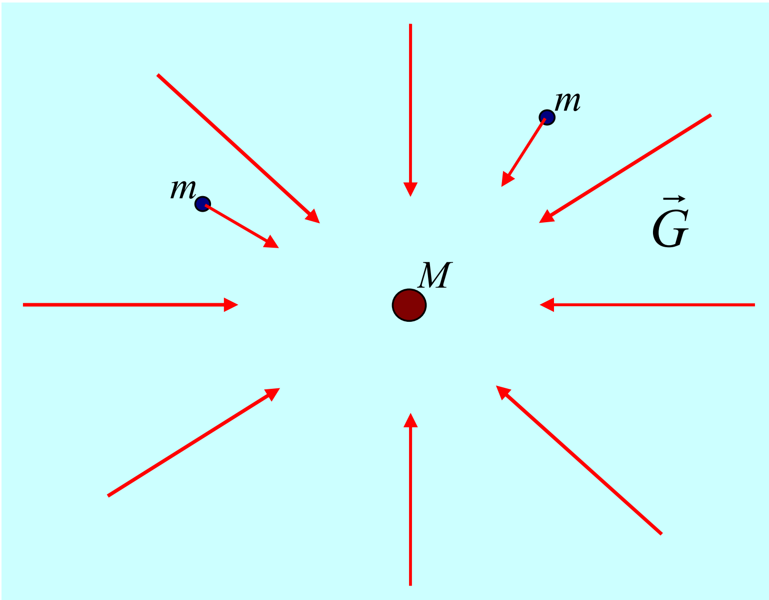
$$\vec{G}=\frac{\vec{F}}{m}$$

Az így definiált mennyiséget nevezzük **gravitációs térerősség**nek, amelynek mértékegysége a [N/kg]. A gravitációs térerősségnek a geometriai tér minden pontjához egy jól meghatározott értéke tartozik. Szemléletesen a gravitációs térerősség azt adja meg, hogy milyen erő hatna a tér adott pontjába helyezett egységnyi tömegű próbatestre.

Példaként határozzuk meg egy *M* tömegű tömegpont gravitációs erőterét! Ha az *M* tömegű test környezetének egy *P* pontjába egy *m* tömegű pontszerű próbatestet helyezünk el, akkor erre a testre az általános tömegvonzás törvényének értelmében ható erő:

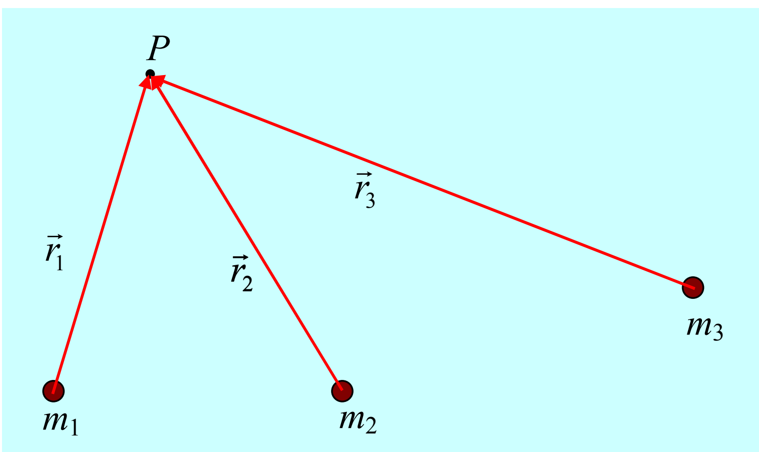
$$\vec{F}=-\gamma\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \qquad \text{ezt osztva az } m \text{ tömeggel:} \quad \vec{G}=-\gamma\frac{M}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \quad \text{nagysága:} \quad G=\gamma\frac{M}{r^2}$$

Ez a Föld felszínén nyilván megegyezik a gravitációs gyorsulással: $g = \gamma \frac{m_F}{R_F^2}$



A gravitációs térerősségvektorok a teret keltő test felé mutatnak ezért a testet a térerősség forrásának nevezzük. **A gravitációs térerősség forrása a (súlyos) tömeg.**

Az M tömegű pontszerű test által létrehozott gravitációs tér gömbszimmetrikus, és nagysága a forrástesttől mért távolság négyzetével fordítottan arányos.



A gravitációs térerősség egy adott P pontban, az összes környezetében levő tömegpont által létrehozott egyedi térerősségek, vektori eredője:

$$\vec{G}(P) = \sum_i \vec{G}_i = \sum_i -\gamma \frac{m_i}{r_i^2} \frac{\vec{r}_i}{r_i}$$

ahol m_i jelöli az egyes tömegpontok tömegét, $\vec{r}_i$ pedig az egyes tömegpontoktól a tér egy tetszőleges P pontjába mutató helyvektorokat.

A gravitációs erőteret erővonalakkal szemléltethetjük. Az erővonalak képzeletbeli irányított térgörbék, amelyek érintője bármely pontban a gravitációs térerő irányába mutat. Az erővonalak nem ágazhatnak el, nem keresztezhetik egymást, hiszen ekkor az elágazási vagy kereszteződési pontban nem lenne egyértelmű a térerősség. A térerővonalak a végtelenből közelednek a tér forrását jelentő tömeghez és ezen végződnek. A térerősség értékét egy adott helyen az erővonalak sűrűsége, azaz az erővonalakra merőleges egységnyi felületen áthaladó erővonalak száma adja meg. Megjegyezzük, hogy a gravitációs erőtér erővonalakkal való szemléltetése csakis az erőhatás $1/r^2$-es távolságfüggése miatt lehetséges, ugyanis nyilvánvalóan egy tömegpont erővonalainak sűrűsége a tömegponttól való távolság négyzetével fordított arányban csökken.

Az általános tömegvonzás törvényének jelentősége

Az általános tömegvonzás törvényét Newton a mozgások egy szűk osztályának, nevezetesen a bolygók mozgásának megfigyelése révén nyert ismeretekből kiindulva alkotta meg. A gravitációs erőtörvény azonban nemcsak a bolygómozgások precíz magyarázatára képes, hanem a mozgások egy jóval tágabb körét engedi meg. A dinamika általános alapegyenletének deduktív alkalmazása révén, a másodrendű differenciálegyenlet tetszőleges kezdőfeltételekhez tartozó általános megoldásával meghatározhatjuk a gravitációs kölcsönhatás eredményeként kialakuló mozgások teljes körét. A pálya alakját a kezdeti feltételek ($\vec{r}_0, \vec{v}_0$) határozzák meg. Megmutatható, hogy a lehetséges pályák alakja minden esetben olyan kúpszelet (ellipszis, parabola, hiperbola), amelynek egyik fókusza az erőcentrumban van. Kimutatható, hogy ha a rendszer (pl. egy bolygó és egy környezetében levő aszteroida) teljes mechanikai energiája kisebb mint nulla (azaz a mozgási energia kisebb, mint a gravitációs potenciális energia, amely negatív, mint majd hamarosan látjuk), akkor az aszteroida kötött pályán (ellipszis, vagy kör) mozog a bolygó körül. Ha az összes energia nagyobb mint nulla (azaz a mozgási energia nagyobb, mint a gravitációs potenciális energia) akkor az aszteroida hiperbola pályán halad el a bolygó mellett. Ha éppen nulla az összes energia (azaz a mozgási energia egyenlő, a gravitációs potenciális energiával), akkor az aszteroida parabola pályán halad el a bolygó mellett.

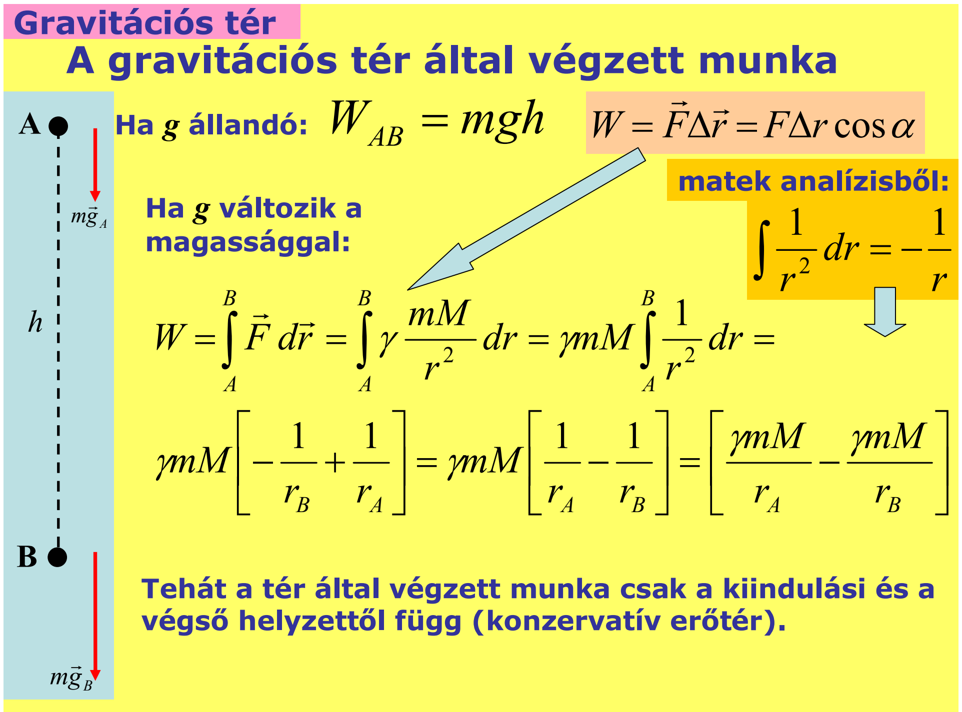
A gravitációs erőtörvény ismeretében tehát precízen meghatározhatjuk a bolygókon kívül a Naprendszerhez tartozó tetszőleges egyéb égitestek, pl. üstökösök, meteorok, holdak, mesterséges holdak mozgását is. Centrális mozgásokról lévén szó, természetesen valamennyi égitest esetében érvényes a területi sebesség tétele.

Minthogy a Nap tömege sokszorosan nagyobb a bolygók tömegénél, ezért a bolygók mozgását elsősorban a Nap gravitációs tere határozza meg. Nyilván azonban a többi bolygó is hatást gyakorol egy kiszemelt bolygó mozgására, amelynek eredményeként a valóságos bolygópályák parányi mértékben eltérnek az ideális elliptikus pályától. Ezeket az eltéréseket nevezzük bolygópálya perturbációknak. A gravitációs erőtörvény alapján ezek a perturbációk - adott bolygóelrendeződések esetén - kiszámíthatók. A bolygópálya perturbációk pontos számítása tette lehetővé a Naprendszer külső bolygóinak a felfedezését. Így pl. az Uránusz megfigyelt pályájának eltérései az összes addig ismert bolygó figyelembe vételével végzett számításokhoz képest csak egy újabb nagy tömegű külső bolygó feltételezésével voltak magyarázhatók. Az általános tömegvonzás törvénye alapján pontosan megjósolható volt a feltételezett bolygó pályája, illetve egy adott időpillanatban elfoglalt helye. A számítások (Urbain Le Verrier) alapján a távcsövet az égbolt megfelelő pontjára irányítva fedezték fel az Neptunusz bolygót (Galle, 1846).

A gravitációs kölcsönhatás egyike a mai ismereteink szerint létező négy alapvető kölcsönhatásnak. Noha a gravitációs kölcsönhatás a többihez viszonyítva igen gyengének tekinthető, mégis ez az egyedüli kozmikus méretekben uralkodó erőhatás. Az erős és a gyenge kölcsönhatás ugyanis rendkívül rövid hatótávolságúak, míg a gravitációhoz hasonló távolságfüggést mutató elektromos kölcsönhatás a kétféle töltés létezése, s a világ alapvető semlegessége miatt gigantikus méretekben nem érvényesül.

A gravitációs kölcsönhatás szabja meg az égitestek, galaxisok, galaxishalmazok mozgását, s ezáltal az egész Univerzum sorsának alakulását. Tudjuk, hogy egy táguló világegyetemben élünk, de e tágulás mértékét erősen befolyásolja a benne lévő tömeg (és ma még ismeretlen természetű ún. „sötét energia”). A gravitáció pontosabb leírását az általános relativitás elmélete adja meg.

A gravitációs tér által végzett munka



Láttuk, hogy homogén gravitációs térben, ahol a g minden pontban ugyanakkora, a gravitációs tér által végzett munka: mgh, ahol h a kezdő és a végpont közti „szintkülönbség”, azaz a kezdő és a végpontot összekötő helyvektor g irányába eső komponensének nagysága. Ha a munkavégzés során a g nem állandó minden pontban (más a g_A, mint a g_B), akkor az általános szabályt kell alkalmazni, azaz a munkavégzés az erő út (helyvektor) szerinti integrálja. Helyettesítsük be az erő helyére a gravitációs erőt, az általános tömegvonzásból!

$$W = \int_A^B \vec{F}\,d\vec{r} = \int_A^B \gamma\frac{mM}{r^2}dr$$

itt felhasználtuk azt, hogy az erő és a helyvektor ugyanazon irányba mutat, azaz a második egyenlőségjel után elhagyhatjuk a vektorjelöléseket (a cosα itt 1 lesz). Így az integrál egy r-től függő skalárfüggvény határozott integráljává egyszerűsödik.

Az M legyen pl. a Föld tömege, míg a m egy a Föld gravitációs terében mozgó test tömege. Láttuk, hogy a g függ a Föld középpontjától mért távolságtól, azaz nagyobb magasságokban kisebb. Ezt a változást vesszük immár figyelembe az alábbi számolásnál.

Az integrált kiszámítva:

$$W = \int_A^B \vec{F}\,d\vec{r} = \int_A^B \gamma\frac{mM}{r^2}dr = \gamma mM\int_A^B \frac{1}{r^2}dr = \gamma mM\left[-\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_A}\right] = \gamma mM\left[\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right] = \left[\frac{\gamma mM}{r_A}-\frac{\gamma mM}{r_B}\right]$$

Tehát a tér által végzett munka csak a kiindulási és a végső helyzettől függ ($\vec{r}_A$ és $\vec{r}_B$), de független attól, hogy milyen útvonalon jutottunk el egyik pontból a másikba, azaz a nem homogén gravitációs erőtér is konzervatív erőtér.

A potenciális energia gravitációs térben

Ha az inhomogén gravitációs tér is konzervatív, akkor erre is definiálhatunk potenciális energiát (potenciális energia függvényt).

Konzervatív erő által végzett munka, a potenciális energia negatív megváltozásaként írható fel:

$$W=\int_A^B \vec{F}\,d\vec{r}=-E_{\text{pot},B}-(-E_{\text{pot},A})=E_{\text{pot},A}-E_{\text{pot},B}=-\Delta E_{\text{pot}} \qquad \text{vagy:} \qquad W=\int_A^B \vec{F}\,d\vec{r}=\frac{\gamma mM}{r_A}-\frac{\gamma mM}{r_B}$$

Mint korábban láttuk, a potenciális energia alappontját szabadon megválaszthatjuk. Sokszor célszerűnek bizonyul az alappontot a végtelenben választani ($E_{\text{pot},A}=0 \quad \text{ha} \quad r_A\to\infty$) Ekkor a potenciális energia a

B pontban: $\quad E_{\text{pot},B}=-\dfrac{\gamma mM}{r_B}$

Általánosan, bármely *P* pontban: $\quad E_{\text{pot},P}=-\dfrac{\gamma mM}{r_P}$

Két tömegpont gravitációs potenciális energiája tehát: $\quad E_{\text{pot}}=-\dfrac{\gamma m_1 m_2}{r}$

A potenciális energiák különbsége: $\Delta E_{\text{pot}}=E_{\text{pot},B}-E_{\text{pot},A}$ azaz: $\Delta E_{\text{pot}}=-\dfrac{\gamma mM}{r_B}-\left(-\dfrac{\gamma mM}{r_A}\right)$

Itt is felírható a mechanikai energia megmaradásának törvénye (hiszen konzervatív az erőtér):

$$\frac{1}{2}mv_A^2+E_{\text{pot},A}=\frac{1}{2}mv_B^2+E_{\text{pot},B} \qquad \text{ill.} \qquad \frac{1}{2}mv_A^2-\frac{\gamma mM}{r_A}=\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{\gamma mM}{r_B}$$

A gravitációs potenciál

A gravitációs erőtér munkavégző képességének jellemzésére bevezethetjük **gravitációs potenciál** fogalmát, amely a helyzeti energiával ellentétben csupán az erőtér tulajdonságaitól függő mennyiség.

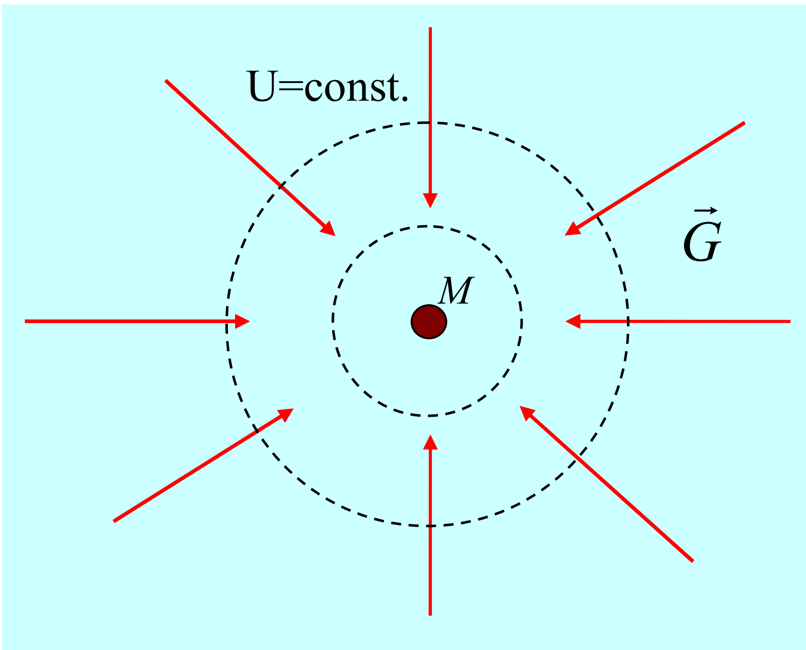
$$U=\frac{E_{\text{pot}}}{m}=-\frac{\gamma M}{r}$$ ahol *M* a teret keltő tömeg (a tér forrása)

Ha a fenti definíciót alkalmazzuk az alábbi összefüggésre:

$\int_A^B \vec{F}\,d\vec{r}=-E_{\text{pot},B}-(-E_{\text{pot},A})$ és figyelembe véve, hogy: $\vec{G}=\dfrac{\vec{F}}{m}$ kapjuk: $\int_A^B \vec{G}\,d\vec{r}=-\left(U_B-U_A\right)$

Azaz a térerősség vonalmenti integrálja megegyezik a potenciálfüggvény végpontokbeli értékeinek negatív különbségével. Számértékét tekintve a gravitációs térerősség az egységnyi tömegre ható erővel egyenlő, ezért két pont közötti potenciálkülönbség megadja a pontokat összekötő tetszőleges görbe mentén az egységnyi tömeg mozgatása során végzett munkát. (Az elektromos tér potenciálját majd hasonlóan definiáljuk.)

Míg a gravitációs térerősséget erővonalakkal szemléltethetjük, addig az $U(\vec{r}\,)$ potenciálfüggvényt ún. ekvipotenciális felületek segítségével reprezentálhatjuk. Az ekvipotenciális felületek olyan felületek, amelyek mentén a potenciál értéke állandó, azaz egy ekvipotenciális felület mentén történő mozgatás (mozgás) során munkavégzés nem történik. Könnyen belátható, hogy az erővonalak iránya az ekvipotenciális felületekre merőleges. Ha ugyanis nem így lenne, akkor az erővonalak érintőjének irányába mutató térerősségnek lenne a felülettel párhuzamos komponense, ami a felület menti elmozdulás esetén munkavégzést eredményezne.



Egy M tömegpont gravitációs erőterének potenciálfüggvényét az $r_0 = \infty$ alappont választás esetén a következőképpen írhatjuk fel:

$$U = -\frac{\gamma M}{r}$$

Esetünkben az ekvipotenciális felületek az M tömegpont köré rajzolt koncentrikus gömbfelületek (itt szaggatott vonal). Az ekvipotenciális felületek (fekete szaggatott vonal) és a gravitációs térerősséget reprezentáló erővonalak (piros nyilak) viszonyát az ábrán figyelhetjük meg.

Az erő és térerősség, illetve a potenciális energia és a potenciál között fennálló relációk alapján érvényesek a következő összefüggések:

$$\vec{G} = -\operatorname{grad} U \quad \text{és} \quad \operatorname{rot}\vec{G} = 0\,; \qquad (\vec{G} = -\nabla U \quad \text{ill.} \quad \nabla \times \vec{G} = 0)$$

Konzervatív erőterekben az erőteret, térerősséget skaláris függvények segítségével (E_{pot}, U) teljes mértékben reprezentálhatjuk. Ahelyett tehát, hogy a konzervatív erőterek leírása során vektorfüggvényekkel kéne bajlódnunk, egyszerű skalárfüggvényekkel számolhatunk, amelyekből gradiens képzéssel (differenciálással) bármikor könnyedén meghatározható a térerősség, illetve az erő.